

**Proximity-Effekt
in
N-S-Systemen
bei tiefen Temperaturen**

Diplomarbeit
von
Wolfgang Belzig

Institut für Theoretische Festkörperphysik
Universität Karlsruhe
Juli 1995

Referent: Prof. Dr. Gerd Schön
Korreferent: Prof. Dr. Dierk Rainer

Komischerweise war der einzige Gedanke, der den Petunientopf beim Herunterfallen durchfuhr: Oh, nein, nicht schon wieder! Viele Leute vermuten, wir könnten viel größere Kenntnisse vom Wesen des Universums haben als bisher, wenn wir nur genau wüßten, warum der Petunientopf das dachte.

Douglas Adams, Per Anhalter durch die Galaxis

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Allgemeines	5
2.1	Proximity-Effekt	5
2.2	Experimente	7
2.3	Modell	9
3	Quasiklassische Green-Funktionen	11
3.1	Die Eilenberger-Gleichung	11
3.2	Der reine Grenzfall	14
3.3	Der schmutzige Grenzfall	15
4	Meißner-Effekt im reinen Grenzfall	17
4.1	Lösung der Eilenberger-Gleichung	17
4.2	Lösung der Maxwell-Gleichung	18
4.3	Meißner-Effekt	20
4.3.1	Schwaches Magnetfeld	22
4.3.2	Starkes Magnetfeld	25
5	Meißner-Effekt im schmutzigen Grenzfall	27
5.1	Lösung der Usadel-Gleichungen	27
5.2	Schwaches Magnetfeld	28
5.3	Starkes Magnetfeld	32
6	Vergleich mit Experimenten und Diskussion	37
6.1	Meißner-Effekt	37
6.2	Die Tieftemperaturanomalie	38
7	Zustandsdichten im Proximitysystem	41
7.1	Green-Funktionen in Realzeit	41
7.2	Selbstkonsistentes Paarpotential	42
7.3	Zustandsdichten	44
7.3.1	Zustandsdichten in unendlichen Systemen	44
7.3.2	Zustandsdichten in endlichen Systemen	47

8 Zusammenfassung	49
A Berechnung der Meißner-Stromdichte im reinen Grenzfall	51
A.1 Lösung der Eilenberger-Gleichungen	51
A.2 Meißner-Stromdichte im zylindrischen Fall	53
B Numerik	55
B.1 Relaxationsverfahren	55
B.2 Iteration des Selbstkonsistenzproblems	57
B.3 Berechnung des selbstkonsistenten Paarpotentials	59
Literaturverzeichnis	61

Kapitel 1

Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Proximity-Effekt in Normalleiter-Supraleiter-Systemen (N-S-Systeme).

Im ersten Teil werden die magnetischen Eigenschaften von solchen Systemen untersucht. Homogene Supraleiter haben die Eigenschaft, das Magnetfeld bei tiefen Temperaturen vollständig zu verdrängen (Meißner-Effekt). In N-S-Systemen kann das Feld auch aus dem normalleitenden Teil verdrängt werden. Dies führt zu einer von Null verschiedenen Suszeptibilität des normalleitenden Teils, die in den Kapiteln 3 und 4 berechnet wird.

Im zweiten Teil wird die Zustandsdichte in einem N-S-System bei $T = 0$ betrachtet. Die Zustandsdichten an der Fermi-Energie unterscheiden sich ganz erheblich in Supraleitern und Normalleitern. Während Supraleitern eine Lücke in der Zustandsdichte haben, ist sie in Normalleitern an der Fermikante konstant. Der allmähliche Übergang in der Nähe einer N-S-Grenzfläche wird in Kapitel 6 selbstkonsistent berechnet.

Der Proximity-Effekt ist seit langem bekannt. Er wurde zuerst allgemein von de Gennes [1] und die magnetischen Eigenschaften im besonderen wurden von der Orsay-Gruppe 1966 diskutiert [2]. Dort wurden die Systeme mit verallgemeinerten Ginzburg-Landau-Gleichungen beschrieben. In der vorliegenden Arbeit sollen diese Systeme mit Hilfe der quasiklassischen Green-Funktionen untersucht werden, wie sie von Eilenberger [3], Larkin und Ovchinnikov [4] eingeführt wurden.

Auch experimentell ist der Proximity-Effekt vielfach untersucht worden. Der Meißner-Effekt wird meistens an zylindrischen Systemen mit einem supraleitenden Kern, der von einem normalleitenden Mantel umgeben ist, gemessen [5, 6, 7]. In neueren Experimenten von Mota et al. wurde dabei ein Verschwinden des Meißner-Effekts bei sehr tiefen Temperaturen gefunden [8, 9]. Diese Tieftemperatur-anomalie ist die Motivation, sich mit dem induzierten Meißner-Effekt auseinanderzusetzen. Der Übergang der Zustandsdichten soll in einem anderen Experiment untersucht werden [10]. Dazu liegen noch keine experimentellen Daten vor.

In Kapitel 2 werden zunächst einige allgemeine Bemerkungen gemacht, wie man den Proximity-Effekt als Kohärenzeffekt verstehen kann. Dann wird kurz auf die experimentell gefundenen Daten eingegangen und schließlich die Geometrie vorgestellt,

die im theoretischen Modell verwendet werden soll.

In Kapitel 3 sollen die theoretischen Grundlagen, die zur Beschreibung des Meißner-Effekts benötigt werden, kurz hergeleitet werden. Dabei wird von den Gorkov-Gleichungen [11] ausgehend die quasiklassische Eilenberger-Gleichung [3] abgeleitet. Sie wird schließlich für die beiden Grenzfälle vereinfacht, daß

- (a) ein hochreines Material ohne jede Art der Verunreinigung und
- (b) ein Material mit einer hohen Konzentration von nichtmagnetischen Störstellen

vorliegt. Im Fall (b) führt das auf die Usadel-Gleichung [12].

In Kapitel 4 wird die Theorie aus Kapitel 3 auf Fall (a) angewendet, um den Meißner-Effekt in einer zylindrischen Geometrie zu berechnen. Dabei wird ein nicht-lokaler Strom-Vektorpotential-Zusammenhang und im Grenzfall $R \gg d$ eine räumlich konstante Stromdichte in der normalleitenden Schicht gefunden. Dies stimmt mit früheren theoretischen Arbeiten [13] überein. Die Suszeptibilität wird im Temperaturbereich $0 \leq T < T_c$ in Abhängigkeit vom Magnetfeld berechnet. Für kleine Magnetfelder wurde dies bisher im Grenzfall $R \gg d$ untersucht [14, 15].

In Kapitel 5 wird die Theorie aus Kapitel 3 im Grenzfall (b) angewendet. Hierbei besteht ein lokaler London-artiger Strom-Vektorpotential-Zusammenhang und, damit ist auch die Abschirmstromdichte ortsabhängig. Die Suszeptibilität wurde ebenfalls im Temperaturbereich $0 \leq T < T_c$ in Abhängigkeit vom Magnetfeld berechnet. Für ein unendlich ausgedehntes System in kleinen Magnetfeldern wurde der Effekt bisher mit Hilfe der linearisierten Usadel-Gleichung untersucht [16].

In Kapitel 6 werden die Resultate von den Kapiteln 4 und 5 diskutiert und miteinander und mit experimentellen Daten verglichen. Einige Erklärungsversuche für die Tieftemperaturanomalie werden untersucht.

In Kapitel 7 werden die Zustandsdichten in schmutzigen N-S-Schichtsystemen bei $T = 0$ numerisch berechnet. Dabei wird zunächst das selbstkonsistente Paarpotential im Supraleiter bestimmt. Schließlich lassen sich damit die orts aufgelösten Zustandsdichten sowohl im Fall eines unendlich ausgedehnten Systems als auch in endlichen Systemen bestimmen.

Es folgt eine Zusammenfassung der gewonnenen Ergebnisse. In den Anhängen sind Details der analytischen Rechnung angegeben, und es werden einige Anmerkungen zu den numerischen Techniken gemacht.

Kapitel 2

Allgemeines

2.1 Proximity-Effekt

Der Proximity-Effekt tritt auf, wenn Normalleiter in elektrischem Kontakt mit Supraleitern stehen. Der Normalleiter erhält dann in der Nähe der Grenzfläche bei tiefen Temperaturen supraleitende Eigenschaften. Gleichzeitig werden diese Eigenschaften auf der supraleitenden Seite der Grenzfläche abgeschwächt. Das läßt sich zum Beispiel, wie folgt, verstehen.

In einem Supraleiter gibt es eine endliche Cooper-Paardichte, wobei ein Cooper-Paar aus zwei Elektronen in zeitumgekehrten Einteilchen-Zuständen mit festgekoppelten Phasen der Wellenfunktionen besteht. Insbesondere sind die Phasen aller Cooper-Paare miteinander gekoppelt. Dies führt zu einem endlichen thermischen Mittelwert der Form

$$F(x) = \langle \Psi_{\downarrow}(x)\Psi_{\uparrow}(x) \rangle, \quad (2.1)$$

dessen Betrag mit der Dichte der Cooperpaare zusammenhängt, und der deshalb Paaramplitude heißt. Eine von Null verschiedene Paaramplitude ist verantwortlich für die supraleitenden Eigenschaften. In einem isolierten Normalleiter, also einem Leiter ohne Cooper-Paarkopplung über Phononen oder bei einer Temperatur oberhalb der kritischen Temperatur, sind die Phasen nicht gekoppelt. In dem Erwartungswert (2.1) mitteln sich alle Beiträge wegen den unkorrelierten Phasen raus und die Paaramplitude ist Null. Damit ist auch die Cooperpaardichte Null und es sind keine supraleitenden Eigenschaften vorhanden. Ist solch ein Material jedoch in elektrischem Kontakt mit einem Supraleiter, bei dem die Phasen korreliert sind, so behalten die Elektronen in der Nähe ("in proximity") des Supraleiters diese Phasenkohärenz. Damit erhält der Normalleiter auch supraleitende Eigenschaften.

Eine wichtige Voraussetzung für die induzierte Supraleitung auf der normalleitenden Seite der Grenzfläche ist also die Phasenkohärenz. Die charakteristische Länge für diesen Effekt ist diejenige Länge, nach der entweder ein einzelnes Elektron sein Phasengedächtnis verliert, oder die kollektive Phasenkohärenz der Elektronen verloren geht. Im ersten Fall heißt die Länge Phasenkohärenzlänge und im zweiten Fall thermische Kohärenzlänge.

In einem idealen Material ohne Verunreinigungen ist die thermische Kohärenzlänge, die aufgrund der Verbreiterung der Fermikante mit der Temperatur zustande kommt, gegeben durch $\xi_c^N(T) = \hbar v_F / 2\pi k_B T$. In einem Material mit vielen elastischen Verunreinigungen erfolgt die Elektronenbewegung diffusiv mit einer Diffusionskonstanten $D = \frac{1}{3} v_F^2 \tau_{el}$ (τ_{el} : mittlere elastische Stoßzeit). Die thermische Kohärenzlänge ist dann gegeben durch $\xi_d^N(T) = (\hbar D / 2\pi k_B T)^{1/2}$. In beiden Fällen können diese Längen für $T \rightarrow 0$ sehr groß werden. Durch inelastische Streuung an Phononen mit einer Streuzeit τ_{in} bzw. paarbrechende Streuung an magnetischen Störstellen mit einer Streuzeit τ_s ist die Phasenkohärenzlänge immer beschränkt. Sie kann im reinen Grenzfall $v_F \tau_{in}$ bzw. $v_F \tau_s$ und im schmutzigen Grenzfall $(D\tau_{in})^{1/2}$ bzw. $(D\tau_s)^{1/2}$ nicht überschreiten.

Der gleiche Effekt beeinflusst auch die supraleitende Seite der Grenzfläche. Dort ist in Anwesenheit des Normalleiters eine endliche Dichte unkorrelierter Elektronen im Supraleiter, die zu einer Abschwächung der supraleitenden Eigenschaften führen. Diese Dichte zerfällt mit der für den Supraleiter charakteristischen Länge $\xi_c^S = \hbar v_F / 2\Delta$ im reinen Fall und $\xi_d^S = (\hbar D / 2\Delta)^{1/2}$ im schmutzigen Grenzfall, wobei Δ der Betrag des Ordnungsparameters ist. Im reinen Fall wird als Kohärenzlänge oft $\xi_0 = \hbar v_F / \pi \Delta$ verwendet.

Theoretisch läßt sich der Effekt auch folgendermaßen einfach verstehen. Man betrachtet die Selbstkonsistenzgleichung für die Supraleitung

$$\Delta(x) = \lambda(x) \langle \Psi_{\downarrow}(x) \Psi_{\uparrow}(x) \rangle . \quad (2.2)$$

Hierbei ist Δ das Paarpotential, λ die Paarwechselwirkung und $\langle \Psi_{\downarrow}(x) \Psi_{\uparrow}(x) \rangle$ die Paaramplitude. An dieser Gleichung sieht man, daß die Paaramplitude in einem Normalleiter mit $\lambda = 0$ durchaus endlich sein kann, da mit $\Delta = 0$ auch die Selbstkonsistenzgleichung erfüllt ist. An einer idealen Normalleiter-Supraleiter-Grenzfläche ist die Paaramplitude natürlich stetig, da sie aus Wellenfunktionen berechnet wird, während das Paarpotential unstetig sein kann.

Die Situation ist schematisch in Abb. 2.1 dargestellt. Tief im Supraleiter hat die Paaramplitude ihren Gleichgewichtswert, der durch die Selbstkonsistenzgleichung (2.2) bestimmt ist, wobei das Paarpotential im BCS-Fall für $T \ll T_c$ gegeben ist durch

$$\Delta(T = 0) = 1.76 k_B T_c . \quad (2.3)$$

In der Nähe der Grenzfläche fällt dieser Wert ein wenig ab, die Cooper-Paardichte wird geringer, und damit werden die supraleitenden Eigenschaften abgeschwächt. Die Länge, auf der dieser Abfall passiert ist für $T \ll T_c$ gegeben durch die supraleitende Kohärenzlänge $\xi_{c/d}^S$. Auf der N-Seite setzt sich dieser Trend fort, jedoch mit einer anderen Längenskala. Die Dichte der korrelierten Elektronen sinkt mit zunehmendem Abstand von der Grenzfläche weiter ab. Die Längenskala ist, solange inelastische oder paarbrechende Prozesse keine Rolle spielen, die normale thermische Kohärenzlänge $\xi_{c/d}^N$, die bei tiefen Temperaturen $T \ll T_c$ sehr viel größer als die supraleitende Kohärenzlänge sein kann.

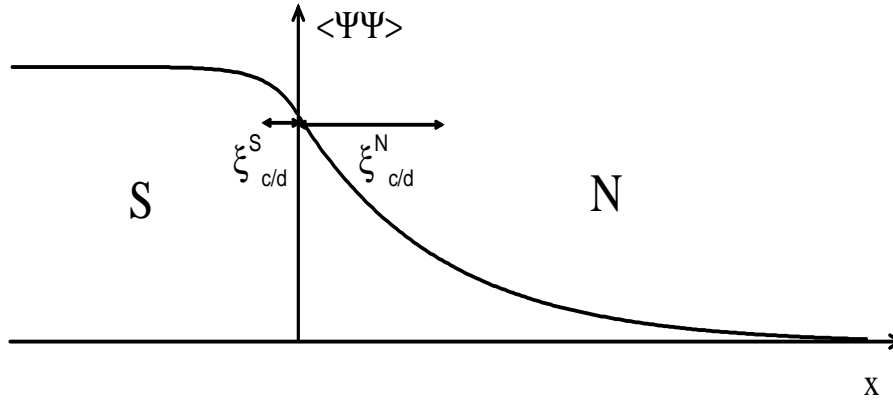


Abbildung 2.1: Verlauf der Paar-Amplitude an einer N-S-Grenzfläche

2.2 Experimente

Es hat in den letzten Jahren eine ganze Reihe von Experimenten gegeben, die den Proximity-Effekt untersucht haben. Insbesondere die magnetischen Abschirmeigenschaften von dünnen normalleitenden Schichten (meist Cu oder Ag) auf klassischen Supraleitern (meist Nb, Ta oder Al) wurden untersucht [5, 6, 7, 8, 9]. Dabei werden mit hochreinen Materialien und durch Ausheilen der Proben freie Weglängen von bis zu $10\mu m$ erreicht. Die untersuchten Schichtdicken sind im Bereich $3 - 30\mu m$. In den untersuchten Schichten ist also teilweise die freie Weglänge von der Ordnung der Schichtdicke oder sogar größer.

In diesen Experimenten wurden zylindrische Geometrien untersucht, bei denen ein Kern aus supraleitendem Material von einer im Vergleich zum Radius des Zylinders dünnen normalleitenden Schicht umgeben ist. Diese Drähte mit Dicken im μm -Bereich werden durch Langziehen von dickeren Drähten hergestellt. Gemessen wird an einem ganzen Bündel solcher Drähte. Dabei wird ein paralleles Magnetfeld an ein Bündel angelegt und dann der Fluß durch das gesamte Bündel gemessen. Bei der kritischen Temperatur des Supraleiters T_c wird nun zunächst das Magnetfeld aus dem Supraleiter verdrängt. Da der Supraleiter sehr viel größer als die magnetische Eindringtiefe ist, ist die Suszeptibilität des Supraleiters $-1/4\pi$ und kann als Referenzwert benutzt werden. Bei tieferen Temperaturen wird das Feld schließlich aus der normalleitenden Schicht verdrängt. Aus dem Verhältnis der Volumenanteile von supraleitendem zu normalleitendem Material und dem Referenzwert der Magnetisierung des Supraleiters läßt sich dann die Suszeptibilität der Normalleiterschicht absolut bestimmen.

Für die Tieftemperaturabhängigkeit der Suszeptibilität in dem Bereich, in dem noch keine Sättigungseffekte vorhanden sind, werden Verhalten $\sim T^{-\alpha}$ gefunden, wobei α zwischen 0.5 und 2 liegt, je nach Reinheit der Probe. In extrem schmutzigen Proben wird ein Exponent von 0.5 gefunden, der sich mit der Voraussage der verallgemeinerten Ginzburg-Landau-Theorie [2] deckt. Für die anderen Werte des

Exponenten gibt es bisher keine befriedigende Erklärung.

Die Magnetfeldabhängigkeit der Suszeptibilität wurde ebenfalls bestimmt. Bei tiefen Temperaturen ist diese unstetig, die Suszeptibilität springt fast auf Null zurück, wenn das Magnetfeld einen bestimmten Wert überschreitet. Außerdem zeigt sich ein hysteretisches Verhalten, wenn das Feld hoch- bzw. heruntergefahren wird.

In den letzten Experimenten von Mota et al. [8, 9] wurde jedoch ein neues Phänomen gefunden, das bisher nicht erklärt werden konnte. Bei sehr tiefen Temperaturen wurde ein Verschwinden des Diamagnetismus gemessen. Die Suszeptibilität erreicht zunächst mit fallender Temperatur den Sättigungswert von $-1/4\pi$. Jedoch nimmt der Betrag der Suszeptibilität unterhalb von $T \approx 10 - 100mK$ wieder ab und geht bei der dünnsten Probe sogar auf 0 zurück. Für diese Tieftemperaturanomalie gibt es noch keine befriedigende Erklärung.

Da der induzierte Meißner-Effekt theoretisch bisher nur in gewissen Grenzfällen untersucht wurde, hat diese Tieftemperaturanomalie einige theoretische Untersuchungen angeregt. In dieser Arbeit soll nun zunächst der induzierte Meißner-Effekt eingehend untersucht werden. Später soll auf die möglichen experimentellen Konsequenzen eingegangen werden.

In einem weiteren geplanten Experiment [10] soll die lokale Zustandsdichte auf der normalleitenden Seite einer N-S-Grenzfläche mit Hilfe von Tunnelkontakten gemessen werden. Hierzu liegen ebenfalls noch keine theoretischen Arbeiten vor.

2.3 Modell

In diesem Abschnitt sollen kurz die Geometrien, die in den weiteren Kapiteln untersucht werden, vorgestellt und einige Annahmen, die gemacht wurden, eingeführt werden.

Um den Experimenten möglichst nahe zu kommen, wäre es wünschenswert, den Meißner-Effekt an Zylindern, wie in Abb. 2.2 dargestellt, zu untersuchen. Dies wäre ein supraleitender Kern mit Radius R , umgeben von einer normalleitenden Schicht der Dicke d , wobei der ganze Zylinder die Länge L hat. Die beiden Materialien wären jeweils gekennzeichnet durch Fermigeschwindigkeit v_F , elastische freie Weglänge l und eine kritische Temperatur T_c im Falle des Supraleiters.

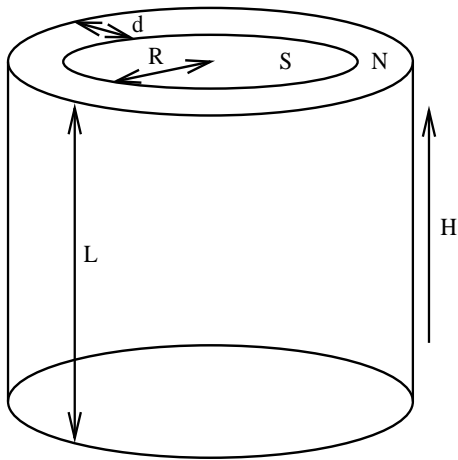


Abbildung 2.2:

Proximityzylinder mit Radius des Supraleiters R , Dicke der Normalschicht d und Länge L .

Der Vektor H kennzeichnet die Richtung des angelegten Feldes

S: klassischer Supraleiter mit $T_c \neq 0$

N: Normalleiter mit $T_c = 0$

Da jedoch in Experimenten die Länge L des Zylinders immer viel größer als der Durchmesser ist, wird die endliche Ausdehnung in dieser Richtung vernachlässigt und der Zylinder als unendlich lang angenommen.

Der Radius des Supraleiters ist sehr viel größer als die supraleitende Kohärenzlänge. Der Supraleiter ist im Inneren also nicht gestört durch den Normalleiter. Die kritische Temperatur des Supraleiters bleibt unverändert.

Eine weitere Annahme zur Vereinfachung der Rechnungen ist, daß die Grenzfläche zwischen Supraleiter und Normalleiter ideal ist und die Fermigeschwindigkeiten in beiden Materialien gleich sind. Der Reflexionskoeffizient ist also 0. Diese Annahmen sind insoweit gerechtfertigt, als ein endlicher Reflexionskoeffizient die Proximityeigenschaften nicht qualitativ beeinträchtigt, sondern nur quantitative Änderungen mit sich bringt.

In den weiteren Kapiteln werden Einheiten mit $\hbar = k_B = c = 1$ verwendet.

Kapitel 3

Quasiklassische Green-Funktionen

In diesem Kapitel sollen in der gebotenen Kürze die theoretischen Grundlagen, die in der weiteren Arbeit benötigt werden, hergeleitet werden. Dabei werden auch einige Annahmen erläutert, die sich als zweckmäßig erweisen. Die Methode, die verwendet wird, basiert auf dem Imaginärzeitformalismus, wie er z.B. in den Büchern von Rickayzen [17] und Abrikosov et al. [11] eingeführt wird. Später werden auch Realzeit-Green-Funktionen verwendet. Um den Rahmen eines Kapitels einzuhalten, wird der quasiklassische Formalismus nur in Imaginärzeit eingeführt. Die Realzeit-Green-Funktionen lassen sich daraus im Gleichgewicht durch analytische Fortsetzung gewinnen.

3.1 Die Eilenberger-Gleichung

Der Ausgangspunkt für die quasiklassischen Green-Funktionen ist die Ein-Teilchen-Temperatur-Green-Funktion (Gorkov-Funktion) [11]

$$\hat{G}(\mathbf{r}_1, \tau_1 | \mathbf{r}_2, \tau_2) = - \langle\langle T_\tau \bar{\Psi}(\mathbf{r}_1, \tau_1) \bar{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_2, \tau_2) \rangle\rangle,$$

wobei

$$\bar{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, \tau) = (\Psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}, \tau), \Psi_\downarrow(\mathbf{r}, \tau))$$

ein Spinor im Nambu-Raum ist und $\hat{\cdot}$ eine Matrix in diesem Raum bezeichnet. Hierbei ist $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ der thermische Mittelwert, T_τ der Zeitordnungoperator bezüglich τ und $\Psi_\downarrow(\mathbf{r}, \tau)$ der übliche Feldoperator für ein Elektron mit Spin \downarrow am Ort \mathbf{r} in imaginärer Zeit $\tau = it$. Die **fettgedruckten** Symbole sind Vektoren im dreidimensionalen Raum. Die Gorkov-Funktion hängt nur von der Differenz $\tau = \tau_1 - \tau_2$ ab. Man kann sie im Intervall $-1/T < \tau < 1/T$ in eine Fourier-Reihe

$$\hat{G}(\mathbf{r}_1, \tau | \mathbf{r}_2, 0) = T \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \hat{G}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_2) e^{-i\omega_\mu \tau}$$

entwickeln, wobei wegen $G(\tau - 1/T) = -G(\tau)$ nur die ungerade Frequenzen

$$\omega_\mu = \pi T(2\mu + 1) \quad \text{mit} \quad \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

vorkommen. Für die Fourier-Komponenten ergibt sich die Bewegungsgleichung (*Gorkovgleichung*)

$$\left[i\omega_\mu - \varepsilon(-i\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{r}_1))\hat{\tau}_3 - \hat{\Sigma}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}_1) \right] \hat{G}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (3.1)$$

mit

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} - ie\mathbf{A}(\mathbf{r})\hat{\tau}_3$$

und der Einteilchenenergie

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - E_F,$$

gemessen gegen die Fermi-Energie. Die Selbstenergie Σ enthält das selbstkonsistente Paarpotential und alle möglichen Streuprozesse. Auf diese soll später eingegangen werden.

Die durch diese Gleichung bestimmte Green-Funktion enthält jedoch noch zuviel Informationen für die meisten Probleme. Sie ist eine räumlich stark oszillierende Funktion von $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ (nämlich auf einer Längenskala λ_F). Bei Supraleitern ändern sich die meisten Größen (Paaramplitude, Magnetfeld, usw.) auf einer Längenskala der Ordnung ξ_c^S , die um einen Faktor $E_F/T_C \approx 10^4$ größer ist als λ_F . Außerdem wird bei der Berechnung von physikalisch relevanten Größen, wie z.B. Stromdichte oder Gapgleichung, irgendwann immer über die Energie integriert und, so werden die schnellen Oszillationen herausintegriert.

Diese Tatsachen führten zur Entwicklung der Theorie der quasiklassischen oder auch ξ -integrierten Green-Funktionen, bei denen die Energieintegration schon vor der Lösung von (3.1) durchgeführt wird, durch Eilenberger [3], Larkin und Ovchinkov [4]. Man definiert sich zunächst neue Green-Funktionen, die bezüglich der Relativkoordinate $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ Fourier-transformiert wurden

$$\hat{G}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int d\boldsymbol{\rho} e^{-i\mathbf{p}\boldsymbol{\rho}} \hat{G}_{\omega_\mu}(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}). \quad (3.2)$$

Diese Funktionen sind stark gepeakt bei $\mathbf{p} \approx \mathbf{p}_F$ aufgrund der schnellen Oszillationen. Aus diesem Grund kann in der Bewegungsgleichung für diese Funktionen die quasiklassische Näherung durchgeführt werden. Terme, die Ableitungen nach der Schwerpunktskoordinate enthalten, sind von der Ordnung ξ_c^S und werden, wenn sie quadratisch auftreten, vernachlässigt. In gemischten Termen der Form $\mathbf{p}\nabla$ kann \mathbf{p} durch \mathbf{p}_F ersetzt werden. Man erhält schließlich

$$\left[i\omega_\mu - \left(\varepsilon(\mathbf{p}) - \frac{i}{2}\mathbf{v}_F\hat{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{r} \right) \hat{\tau}_3 - \hat{\Sigma}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) \right] \hat{G}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 1.$$

Ferner wurde angenommen, daß die Selbstenergie nur schwach vom Impulsbetrag abhängt, eine mögliche Abhängigkeit von der Richtung könnte weiter mitgenommen werden, soll jedoch hier nicht weiter verfolgt werden.

Jetzt wird die Gleichung mit $\hat{\tau}_3$ multipliziert und das Inverse dieser ganzen Gleichung abgezogen. Das Ergebnis ist eine homogene Gleichung, die nicht mehr vom

Betrag des Impulses abhängt. Es kann also über die Energie integriert werden, und aus den Green-Funktionen (3.2) werden die quasiklassischen Green-Funktionen

$$\hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_F) = \frac{i}{\pi} \int d\varepsilon(p) \hat{G}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (3.3)$$

die nur noch von der Richtung des Fermi-Impulses bzw. der Fermi-Geschwindigkeit \mathbf{v}_F abhängen (aus Konvention noch mit einem Faktor i/π verziert).

Die Bewegungsgleichung dieser Green-Funktionen (3.3) ist dann die *Eilenberger-Gleichung* [3]

$$\left[i\omega_\mu \hat{\tau}_3 - \hat{\Sigma}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) + i\mathbf{v}_F \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}), \hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_F) \right] = 0 \quad (3.4)$$

Diese Gleichung muß durch eine Normierungsbedingung ergänzt werden. Aus (3.4) kann eine Differentialgleichung für \hat{g}^2 hergeleitet werden, die zeigt, daß \hat{g}^2 räumlich konstant ist. Wenn das System viel größer als die Kohärenzlänge ist, dann erreicht \hat{g} irgendwo die BCS-Form, und die Normierung kann daraus bestimmt werden. Dann ist die Normierungsbedingung

$$(\hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_F))^2 = 1. \quad (3.5)$$

Da hier entsprechend große Systeme betrachtet werden, wird diese Normierung verwendet. In Systemen, deren Abmessungen vergleichbar mit ξ_c^S sind, muß die Normierung genauer untersucht werden [14].

Die Selbstenergie in (3.4) läßt sich schreiben als

$$\hat{\Sigma}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) = \hat{\Sigma}_{el-ph}(\omega_\mu, \mathbf{r}) + \hat{\Sigma}_{imp}(\omega_\mu, \mathbf{r}) + \hat{\Sigma}_s(\omega_\mu, \mathbf{r}). \quad (3.6)$$

Die verschiedenen Beiträge sollen im folgenden einzeln erläutert werden. Der Phononenbeitrag besteht aus zwei Teilen

$$\hat{\Sigma}_{el-ph}(\omega_\mu, \mathbf{r}) = -i\Delta(\mathbf{r}) \hat{\tau}_1 - \frac{i}{2\tau_{in}} \text{sign}(\omega_\mu) \hat{\tau}_3.$$

Der nichtdiagonale Teil ($\propto \hat{\tau}_1$ für einen reellen Ordnungsparameter) enthält die Paarung der Elektronen mittels Phononen zu Cooper-Paaren. "Strong Coupling"-Effekte wurden hierbei nicht berücksichtigt. $\Delta(\mathbf{r})$ muß über eine Selbstkonsistenzgleichung bestimmt werden, die weiter unten angegeben ist. Der zweite Beitrag beinhaltet die inelastische Streuung durch die Phononen. Dieser Beitrag ist bei tiefen Temperaturen meist klein im Vergleich zur elastischen Streuung an nichtmagnetischen Störstellen, die zur Selbstenergie mit

$$\hat{\Sigma}_{imp}(\omega_\mu, \mathbf{r}) = -\frac{i}{2\tau_{el}} \langle \hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_F) \rangle$$

beitragen. Hierbei bedeutet $\langle \dots \rangle = \int \frac{d\Omega v_F}{4\pi} \dots$ eine Winkel-Mittelung über die Fermi-Fläche. Von magnetischen Verunreinigungen kommt ein Beitrag

$$\hat{\Sigma}_s(\omega_\mu, \mathbf{r}) = -\frac{i}{2\tau_s} \hat{\tau}_3 \langle \hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_F) \rangle \hat{\tau}_3,$$

der Spin-Flip-Prozesse beschreibt. Da Cooper-Paare aus Elektronen in zeitumgekehrten Zuständen mit entgegengesetztem Spin bestehen, zerstört diese Streuung die Paarkorrelation. Diese Prozesse können durch die Konzentration von magnetischen Fremdatomen kontrolliert werden. Die Streuzeiten τ_{in}, τ_{el} und τ_s sollen hier nicht weiter berechnet werden, sondern gehen in die Theorie als freie Parameter ein.

Das Paarpotential Δ (der Einfachheit halber reell angenommen) muß selbstkonsistent bestimmt werden durch

$$\Delta(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8} \lambda N(0) T \sum_{\omega_\mu}^{|\omega_\mu| < \omega_c} \langle Tr \hat{\tau}_1 \hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_F) \rangle. \quad (3.7)$$

Die Elektron-Phonon-Kopplungskonstante λ und die Abschneid-Frequenz ω_c werden mittels der Identität

$$1 = \lambda N(0) \left(\ln \frac{T}{T_c} + 2\pi T \sum_{\omega_\mu > 0}^{\omega_c} \frac{1}{\omega_\mu} \right)$$

durch die kritische Temperatur T_c ersetzt. Die Selbstkonsistenzgleichung ist dann von der Form

$$\Delta(\mathbf{r}) N(0) \ln \frac{T}{T_c} + 2\pi N(0) T \sum_{\omega_\mu > 0} \left[\frac{\Delta(\mathbf{r})}{\omega_\mu} + \langle Tr \hat{\tau}_1 \hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_F) \rangle \right] = 0 \quad (3.8)$$

In inhomogenen Systemen, wenn normalleitende Bereiche mit $\lambda = 0$ vorhanden sind, kann man an (3.7) sehen, daß die Selbstkonsistenzbedingung dort mit $\Delta(\mathbf{r}) = 0$ automatisch erfüllt ist.

Für den Strom ergibt sich

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -4ie\pi N(0) T \sum_{\omega_\mu > 0} \langle Tr \hat{\tau}_3 \mathbf{v}_F \hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_F) \rangle. \quad (3.9)$$

In den nächsten beiden Abschnitten sollen diese Gleichungen in zwei Grenzfällen vereinfacht werden.

3.2 Der reine Grenzfall

In diesem Fall werden alle Streueffekte vernachlässigt. Das heißt, die Streuzeiten τ_{in}, τ_{el} und τ_s sind sehr viel größer als alle anderen Zeitskalen im System. Diese Bedingung läßt sich an den entsprechenden mittleren freien Weglängen veranschaulichen. Betrachtet man z.B. die elastische freie Weglänge $l_{el} = v_F \tau_{el}$, so lautet die Bedingung

$$\begin{aligned} l_{el} &\gg \xi_c^S && \text{in Supraleitern und} \\ l_{el} &\gg \xi_c^N(T) && \text{in Normalleitern.} \end{aligned}$$

Die Selbstenergie reduziert sich auf das Paarpotential, und die Eilenberger-Gleichung vereinfacht sich zu

$$\mathbf{v}_F \nabla \hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_F) = \left[(\omega + i e \mathbf{v}_F \mathbf{A}(\mathbf{r})) \hat{\tau}_3 + \Delta(\mathbf{r}) \hat{\tau}_1, \hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_F) \right]. \quad (3.10)$$

In normalleitenden Systemen ist dieser Grenzfall nur für $T \gg \tau_{el}^{-1}$ erreicht.

3.3 Der schmutzige Grenzfall

Im allgemeinen sind die quasiklassischen Green-Funktionen anisotrop im Impulsraum. Jetzt soll der Fall betrachtet werden, daß eine starke elastische Streuung vorhanden ist, während inelastische und paarbrechende Streuung schwach dagegen sind ($\tau_{el} \ll \tau_{in}, \tau_s$). Der Beitrag der elastischen Streuung zur Selbstenergie enthält einen Term $\langle \hat{g}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_F) \rangle$, der dämpfend auf die Anisotropie wirkt. Ist nun wegen einer hohen Störstellenkonzentration die Anisotropie klein, so empfiehlt sich eine Entwicklung der Green-Funktionen nach Kugelfunktionen, wobei nur der s- und der p-Wellenanteil mitgenommen werden. Man macht also den Ansatz

$$\hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_F) = \hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) + \frac{\mathbf{v}_F}{v_F} \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{r}), \quad (3.11)$$

wobei $\hat{\mathbf{g}} \ll \hat{g}$ angenommen wird. Die Selbstenergie in (3.4) ist damit von der Form

$$\hat{\Sigma}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) = -i \Delta(\mathbf{r}) \hat{\tau}_1 - \frac{i}{\tau_{el}} \hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}),$$

wobei die Winkelmittlung im Dämpfungsterm schon ausgeführt wurde und, andere Streumechanismen hier vernachlässigt wurden. Aus der Normierungsbedingung (3.5) folgt nach Winkelmittlung die Normierung des isotropen Teils

$$\hat{g}_{\omega_\mu}^2(\mathbf{r}) = 1 \quad (3.12)$$

und, indem man zuerst mit \mathbf{v}_F multipliziert und dann mittelt,

$$\hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{g}}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{g}}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) \hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.13)$$

wobei Terme, die quadratisch im p-Wellenanteil sind, vernachlässigt wurden. Setzt man jetzt den Ansatz (3.11) in die Eilenberger-Gleichung (3.4) ein und projiziert den anisotropen Teil heraus, dann erhält man mit Hilfe von (3.13) für den p-Wellenanteil

$$\hat{\mathbf{g}}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) = -\tau_{el} \hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) \left[\hat{\boldsymbol{\sigma}}_r, \hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) \right]. \quad (3.14)$$

Der isotrope Anteil ergibt

$$\left[\omega_\mu \hat{\tau}_3 + \Delta(\mathbf{r}) \hat{\tau}_1, \hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) \right] = -\frac{1}{3} v_F^2 \left[\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) \right] \quad (3.15)$$

Dabei wurden die Annahmen

$$\Delta \tau_{el} \ll 1 \quad \text{und} \quad \omega_\mu \tau_{el} \ll 1$$

gemacht. Ausgedrückt durch die elastische freie Weglänge bedeutet dies

$$\begin{aligned} l_{el} &\ll \xi_c^S && \text{in Supraleitern und} \\ l_{el} &\ll \xi_c^N(T) && \text{in Normalleitern.} \end{aligned}$$

Setzt man (3.14) in (3.15) ein, so findet man schließlich die *Usadel-Gleichung*

$$[\omega_\mu \hat{\tau}_3 + \Delta(\mathbf{r}) \hat{\tau}_1, \hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r})] = D \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{r}), \hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) [\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{r}), \hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r})] \right] \quad (3.16)$$

wobei

$$D = \frac{1}{3} v_F l_{el}$$

die Diffusionskonstante ist. Gleichung (3.16) ist eine kompakte Matrixgleichung. Für numerische Zwecke ist eine skalare Form angebrachter. Indem man den Ansatz

$$\hat{g}_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) = G_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) \hat{\tau}_3 + F_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) \hat{\tau}_1$$

macht, kann man (3.16) mit Hilfe der Normierung

$$G_{\omega_\mu}^2(\mathbf{r}) + |F_{\omega_\mu}(\mathbf{r})|^2 = 1$$

auf eine Gleichung

$$D [\nabla - 2ie\mathbf{A}(\mathbf{r})] \left\{ G_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) [\nabla - 2ie\mathbf{A}(\mathbf{r})] F_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) - F_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) \nabla G_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) \right\} = 2\omega_\mu F_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) - 2\Delta(\mathbf{r}) G_{\omega_\mu}(\mathbf{r}) \quad (3.17)$$

für F_{ω_μ} reduzieren. Die Formel für den Strom ausgedrückt durch $F_{\omega_\mu}(\mathbf{r})$ lautet

$$j(\mathbf{r}) = 4\pi e N(0) DT \sum_{\omega_\mu > 0} \text{Im} F_{\omega_\mu}^*(\mathbf{r}) [\nabla - 2ie\mathbf{A}(\mathbf{r})] F_{\omega_\mu}(\mathbf{r}).$$

Damit sind die theoretischen Grundlagen komplett, um den induzierten Meißner-Effekt im schmutzigen und im reinen Grenzfall zu berechnen.

Kapitel 4

Meißner-Effekt im reinen Grenzfall

In diesem Kapitel wird die Suszeptibilität unter der Annahme, daß keine Störstellen vorhanden sind, für den Zylinder aus Abb. 2.2 im parallelen Magnetfeld berechnet. Im ersten Abschnitt wird die Bewegungsgleichung (3.10) für die Green-Funktionen im Grenzfall $l_{el} \rightarrow \infty$ gelöst. Im zweiten Abschnitt wird der Verlauf des Magnetfeldes in der N-Schicht im “ebenen” Fall $R \gg d$ analytisch und im zylindrischen Fall numerisch berechnet. Im dritten Abschnitt werden zunächst die Suszeptibilitäten im Rahmen der linearen Antwort für diese beiden Fällen und dann im letzten Unterabschnitt in Abhängigkeit vom angelegten Magnetfeld im “ebenen” Fall diskutiert.

Das Vektorpotential wird in der symmetrischen Eichung verwendet

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(r)\mathbf{e}_\varphi \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = H\mathbf{e}_z\Theta(r - R - d), \quad (4.1)$$

wobei \mathbf{e}_φ der Einheitsvektor in φ -Richtung und \mathbf{e}_z der in z -Richtung ist.

Das Paarpotential an der N-S-Grenzfläche wird stufenförmig angenommen,

$$\Delta(r) = \Delta\Theta(R - r), \quad (4.2)$$

und die Rechnung nicht selbstkonsistent durchgeführt. Dies ist gerechtfertigt, da einerseits der Supraleiter sehr viel größer als die Kohärenzlänge sein soll, und andererseits die Feldstärke sehr viel kleiner als das kritische Feld des Supraleiters angenommen wird. Ein kleine Unterdrückung des Paarpotentials an der Grenzfläche würde qualitativ nichts ändern. Der Radius des gesamten Zylinders ist $R + d$, wobei der supraleitende Kern den Radius R hat und von einer normalleitenden Schicht der Dicke d umgeben ist.

4.1 Lösung der Eilenberger-Gleichung

In dem Normalleiter ist die Bewegungsgleichung entlang einer klassischen Trajektorie effektiv eindimensional. Die Green-Funktion hängt nur von der Radialkoordinate r ab und damit hat die Eilenberger-Gleichung die Form

$$\mathbf{v}_F \nabla \hat{g}_{\omega_\mu}(r, \mathbf{v}_F) = [(\omega_\mu + i\ell\mathbf{v}_F \mathbf{A}(r))\tau_3, \hat{g}_{\omega_\mu}(r, \mathbf{v}_F)]. \quad (4.3)$$

An der N-S-Grenzfläche werden perfekte Transmission und die gleichen Fermi-Geschwindigkeiten auf beiden Seiten angenommen (Reflexionskoeffizient = 0):

$$\hat{g}_{\omega_\mu}^s(R-0, \mathbf{v}_F) = \hat{g}_{\omega_\mu}^n(R+0, \mathbf{v}_F) \quad (4.4)$$

An der N-Vakuum-Grenzfläche spiegelnde Reflexion:

$$\hat{g}_{\omega_\mu}^n(R+d, v_\perp, v_\parallel) = \hat{g}_{\omega_\mu}^n(R+d, -v_\perp, v_\parallel) \quad (4.5)$$

Eine genaue Darstellung der Lösung ist in Anhang A gegeben. Die Diagonalkomponente der Green-Funktion im Normalleiter (τ_3 -Komponente von \hat{g}^n) ist von den Koordinaten unabhängig. Sie ist gegeben durch

$$g(\mathcal{L}) = \frac{\Omega + \omega_\mu \coth(\chi)}{\omega_\mu + \Omega \coth(\chi)}, \quad (4.6)$$

wobei

$$\chi = \frac{\omega_\mu L_{\mathcal{L}}}{v_F} + ie \int_{\mathcal{L}} \mathbf{A}(r) d\mathbf{r} \quad \text{und} \quad \Omega = \sqrt{\Delta^2 + \omega_\mu^2} \quad (4.7)$$

ist. Hierbei bezeichnet $L_{\mathcal{L}}$ die Länge der Trajektorie \mathcal{L} und $\int_{\mathcal{L}}$ das Linienintegral entlang dieser Trajektorie. Im ebenen Fall $R \gg d$ ist diese Lösung äquivalent zu der von Zaikin in [13] gefundenen.

4.2 Lösung der Maxwell-Gleichung

In diesem Abschnitt werden die Lösungen der Maxwell-Gleichungen in der Normalleiterschicht in den Fällen $R \gg d$ und beliebige R und d diskutiert.

Zunächst zum "ebenen" Grenzfall $R \gg d$. Hier findet man, daß die Stromdichte in der gesamten normalleitenden Schicht räumlich konstant ist und gegeben durch

$$j^n(T, H) \stackrel{R \gg d}{\cong} 16eN(0)v_F T \sum_{\mu=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sin^2 \theta \cos \varphi \quad (4.8)$$

$$\times \frac{\Delta^2 (\cosh \Phi + \cos \phi) \sin \phi}{[\omega_\mu \sinh \Phi + \Omega (\cosh \Phi + \cos \phi)]^2}.$$

Hierbei ist

$$\Phi = \frac{2\omega_\mu L}{v_F} = \frac{4\omega_\mu d}{v_F \cos \theta}$$

eine Art effektive Trajektorienlänge und

$$\phi = 4 \tan \theta \cos \varphi e \int_R^{R+d} A(r) dr$$

die Aharonov-Bohm-Phase entlang dieser Trajektorie. Diese Stromdichte hängt von der Temperatur und vom angelegten Feld H ab. Der Strom-Vektorpotential-Zusammenhang ist nichtlokal. Diese nichtlokale Abhängigkeit läßt sich, wie folgt,

verstehen. Betrachtet man eine semiklassische Trajektorie eines Elektrons im Normalleiter, das mit Geschwindigkeit \mathbf{v}_F aus dem Supraleiter kommt, so wird dieses an der äußeren Grenzfläche reflektiert und läuft dann zurück zum Supraleiter. Dort wird es Andreev-reflektiert und läuft als Loch auf der gleichen Trajektorie zurück, und das Ganze beginnt von vorn. Solch eine semiklassische geschlossene Bahn entspricht quantenmechanisch gebundenen Zuständen. Diese gebundenen Zustände sind bekannt unter dem Namen Andreev-Levels [18]. Auf diesem Weg L nimmt das Elektron eine Phase

$$e \int_L \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 2e \frac{v_{F\varphi}}{v_{Fr}} \int_R^{R+d} A(r) dr$$

auf. Diese Phase führt zu einer Verschiebung der Energien der Andreev-Levels, die proportional zu

$$\frac{e v_{F\varphi}}{d} \int_R^{R+d} A(r) dr$$

ist [19]. Die Abhängigkeit der Energie vom Vektorpotential führt dann zu einem Strom, der aufgrund der Ausdehnung der Andreev-Levels in der gesamten Normalleiterschicht konstant ist.

Die Lösung der Maxwell-Gleichung mit den Randbedingungen

$$A(R) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dr} A(r)|_{r=R+d} + \frac{A(R+d)}{R+d} = H. \quad (4.9)$$

ergibt für die z -Komponente des Magnetfeldes

$$\begin{aligned} B(r) &= H - 4\pi j^n(T, H)(R+d-r) \quad \text{für} \quad R < r < R+d \\ B(r) &= H \quad \text{für} \quad r > R+d. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Das Feld kann für

$$4\pi j^n(T, H)d > H \quad (4.11)$$

innerhalb der Normalleiterschicht das Vorzeichen wechseln. Diesen Effekt nennt man “overscreening”. Er wurde zuerst von Zaikin diskutiert [13]. Die Stromdichte (4.8) kann nun numerisch für alle Temperaturen berechnet werden und damit hat man die Lösung der Maxwell-Gleichung für beliebige Feldstärken.

Im Fall einer zylindrischen Geometrie hängt die Stromdichte in der N-Schicht vom Ort ab, wie von Nazarov gezeigt wurde [20]. Der volle Ausdruck ist in Anhang A angegeben. Der Zusammenhang mit dem Vektorpotential ist ebenfalls nichtlokal. Linearisiert man im Magnetfeld, so lautet die Maxwell-Gleichung

$$\begin{aligned} \xi_c^N(T_c)^2 \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r A(r) &= K \frac{T}{T_c} \sum_{\omega_\mu > 0} \int_0^R \frac{d\rho}{\xi_c^N(T_c)} \int_0^{\pi/2} d\theta \\ &\times \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{\xi_c^N(T_c) r \sqrt{r^2 - \rho^2}} \frac{\Delta^2 (\cosh \Phi + 1)}{(\omega_\mu \sinh \Phi + \Omega (\cosh \Phi + 1))^2} \int_R^{R+d} \frac{A(r') dr'}{\sqrt{r'^2 - \rho^2}}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

wobei die effektive Trajektorienlänge in diesem Fall durch

$$\Phi = \frac{4\omega_\mu(\sqrt{(R+d)^2 - \rho^2} - \sqrt{R^2 - \rho^2})}{v_F |\sin \theta|}$$

gegeben ist. Dabei wurden dimensionslose Einheiten eingeführt. Die Längen werden in Einheiten von

$$\xi_c^N(T_c) = \frac{v_F}{2\pi T_c}$$

der reinen Kohärenzlänge bei T_c gemessen und die Stromdichte enthält eine dimensionslose Materialkonstante

$$K = 32 e^2 N(0) v_F^2 \xi_c^N(T_c)^2 = \frac{24}{\pi} \left(\frac{\xi_c^N(T_c)}{\lambda_N} \right)^2,$$

wobei $\lambda_N = (4\pi e^2 n_e / m)^{-1/2}$ analog der London-Eindringtiefe mit der Elektronendichte des Normalleiters n_e anstatt der suprafluiden Dichte des Supraleiters definiert ist. Typische Werte für K liegen zwischen 1 und 1000. Die Maxwell-Gleichung (4.12) kann aber nicht mehr analytisch gelöst werden, da sie die Form einer nichtlinearen Integro-Differentialgleichung hat. Sie wurde iterativ numerisch gelöst.

In Abb. 4.1 sind die Stromdichten und Feldverläufe in der N-Schicht bei verschiedenen Temperaturen für den “ebenen” Fall aufgetragen. Die Schichtdicke ist $20 \xi_c^N(T_c)$ und der Materialparameter $K = 10$. Im linken Bild ist die Stromdichte dargestellt, die in diesem Fall räumlich konstant ist. Im rechten Bild sind die dazugehörigen Feldverläufe gezeigt. Für $T \lesssim 0.1T_c$ ist die Bedingung (4.11) erfüllt, und das Feld wechselt an der Grenzfläche zum Supraleiter das Vorzeichen. Im Temperaturbereich von $T = 0.05T_c$ bis $T = 0.001T_c$ steigt die Stromdichte nicht mehr an, sondern behält den Wert $j = 3H/8\pi d$ und das Feld an der N-S-Grenzfläche unterschreitet $-H/2$ nicht weiter. Im Bild ist nur die Kurve für $T = 0.01T_c$ eingezeichnet.

Im Gegensatz dazu hängt die Stromdichte im zylindrischen Fall von r ab, wie in Abb. 4.2 gezeigt ist. Hier ist die Schichtdicke $d = 20 \xi_c^N(T_c)$, die Materialkonstante $K = 10$ und der Radius des Supraleiters ist gleich d gewählt. Die Stromdichte kann in diesem Fall lokal deutlich größer sein als im “ebenen” Fall. Bei $T \rightarrow 0$ ist sie an der N-S-Grenzfläche z.B. dreimal so groß. Die Abschirmung ist im äußeren Bereich schwächer, das Feld fällt weniger ab als im ebenen Fall. Je näher man der N-S-Grenzfläche kommt, umso stärker wird die Abschirmung. Dies kann sogar so weit gehen, daß der Effekt des “overscreening” grösser als im ebenen Fall ist.

4.3 Meißner-Effekt

Die Suszeptibilität der Normalleiterschicht erhält man aus der Lösungen der Maxwell-Gleichung durch

$$\chi^n(T, H) = \frac{1}{4\pi} \frac{A(R+d) - A_e(R+d)}{A_e(R+d)}, \quad (4.13)$$

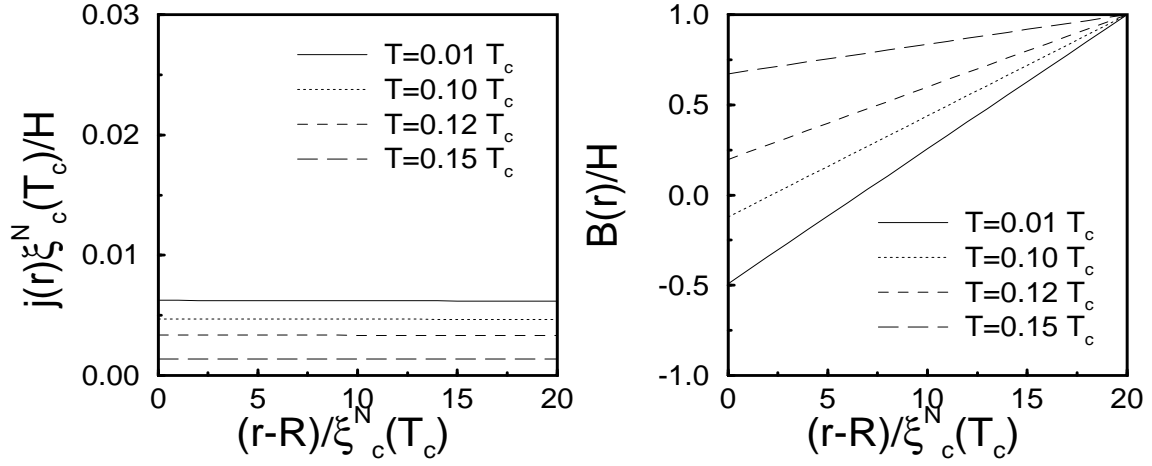


Abbildung 4.1: Stromdichte (linkes Bild) und Magnetfeld (rechtes Bild) in einer “ebenen” Geometrie mit $d = 20\xi_c^N(T_c)$, $R \gg d$ und $K = 10$ für verschiedene Temperaturen.

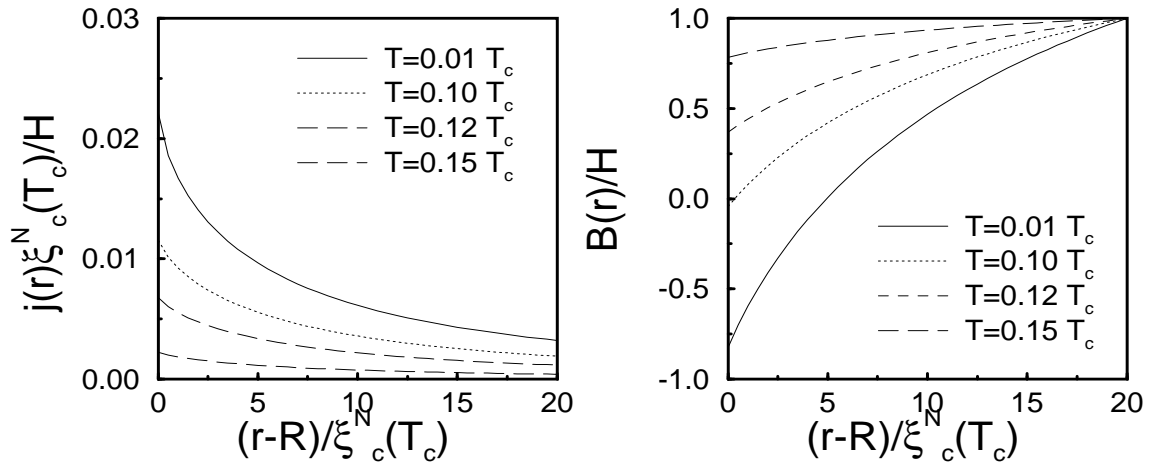


Abbildung 4.2: Stromdichte (linkes Bild) und Magnetfeld (rechtes Bild) in einer zylindrischen Geometrie mit $d = R = 20\xi_c^N(T_c)$ und $K = 10$ für verschiedene Temperaturen.

wobei $A_e(r)$ das Vektorpotential in Abwesenheit des Normalleiters ist. Im ebenen Fall kann das Vektorpotential analytisch berechnet werden und für die Suszeptibilität ergibt sich

$$\chi^n(T, H) = -\frac{j_n(T, H)d}{2H}. \quad (4.14)$$

In den nächsten beiden Unterabschnitten sollen zunächst die im Magnetfeld linearen Suszeptibilitäten sowohl im “ebenen” als auch im zylindrische Fall und die nichtlineare Suszeptibilität nur im “ebenen” Fall berechnet werden.

4.3.1 Schwaches Magnetfeld

Im “ebenen” Fall kann man (4.8) mit der Annahme $e \int_R^{R+d} A(r)dr \ll 1$ vereinfacht werden. Diese Bedingung bedeutet, daß das angelegte Feld so klein sein muß, daß $H \ll \Phi_0/d^2$ ist. In der semiklassischen Sprache der Elektrontrajektorien heißt das, daß der eingeschlossene Fluß kleiner als ein Flußquant ϕ_0 sein muß, die aufgenommene Phase muß weniger als 2π betragen. Für experimentell relevante Abmessungen von $d \approx 1\mu m$ ist dies bei Feldstärken von $H \approx 20G$ erreicht. Die Stromdichte (4.8) faktorisiert in der Form

$$j^n(T, H) = -ej_s(T) \int_R^{R+d} A(r)dr, \quad (4.15)$$

$$j_s(T) = 4\pi eN(0)v_F T \sum_{\mu=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^2 \theta \tan \theta \frac{\Delta^2 \left(\cosh \left(\frac{4\omega_\mu d}{v_F \cos \theta} \right) + 1 \right)}{\left[\omega_\mu \sinh \left(\frac{4\omega_\mu d}{v_F \cos \theta} \right) + \Omega \left(\cosh \left(\frac{4\omega_\mu d}{v_F \cos \theta} \right) + 1 \right) \right]^2}. \quad (4.16)$$

Dieser Ausdruck für j_s kann nun numerisch berechnet werden kann. Mit der analytischen Lösung der Maxwell-Gleichung ergibt sich die Suszeptibilität

$$\chi^n(T) = \frac{-3ej_s(T) d^3}{12 + 16\pi ej_s(T) d^3}. \quad (4.17)$$

Im Fall $T = 0$ läßt sich j_s näherungsweise analytisch berechnen. Es ergibt sich

$$j_s(T = 0) \approx \frac{2}{\pi^3 e d \lambda_N^2}. \quad (4.18)$$

Für $d \gg \lambda_N$ reduziert sich dann (4.17) auf eine von den Abmessungen unabhängige Suszeptibilität

$$\chi^n(T = 0) = -\frac{1}{4\pi} \frac{3}{4}. \quad (4.19)$$

Die Feldverdrängung wird also nie vollständig, die Suszeptibilität überschreitet bei keiner Temperatur $3/4$ eines perfekten Diamagneten. Um zu verstehen, wie es zu

diesem Wert kommt, kann man die magnetische Feldenergiedichte in der normalleitenden Schicht für einen linearen B-Feldverlauf

$$F_n = \frac{H^2}{8\pi} \int_0^d \left(1 - m\left(1 - \frac{x}{d}\right)\right)^2 dx \quad (4.20)$$

betrachten und diese bezüglich der Steigung m minimieren. Es ergibt sich

$$m = \frac{3}{2}.$$

Dies entspricht gerade dem durchgezogenen Feldverlauf in Abb. 4.1 (rechtes Bild) und damit dem Wert (4.19) der Suszeptibilität. Das Feld an der Grenzfläche ist $-H/2$ unabhängig von der Schichtdicke und die Suszeptibilität erreicht nie den Wert eines perfekten Diamagneten. Die Feldenergie kann auch durch stärkere Abschirmung nicht mehr weiter verringert werden. Die Gesamtenergie (Feldenergie minus Kondensationsenergie) wird durch die höhere Kondensationsenergie bei tiefen Temperaturen nur weiter verringert und behält weiterhin ihr Minimum bei $m = 3/2$.

In Abb. 4.3 sind die Suszeptibilitäten für verschieden dicke Normalleiterschichten aufgetragen. Bei den dickeren Schichten tritt die Feldverdrängung erst bei tieferen Temperaturen auf. Die dickste Schicht erreicht den Sättigungswert (4.19) bei $T \rightarrow 0$, da dann die Bedingung $d \gg \lambda_N$ erfüllt ist. In Abb. 4.4 sind die Suszeptibilitäten für verschiedene Materialkonstanten K aufgetragen. Die Temperatur, bei der die Feldverdrängung einsetzt, hängt nicht so stark von K ab und ist bestimmt durch $\xi_c^N(T) \geq d$. Dies unterstreicht die Rolle der thermischen Kohärenzlänge $\xi_c^N(T)$ als charakteristische Länge bei endlichen Temperaturen. Die Kurve mit $K = 1$ erreicht nicht mehr den Sättigungswert (4.19).

Im zylindrischen Fall muß die Maxwell-Gleichung (4.12) numerisch gelöst werden. In Abb. 4.5 sind die Temperaturabhängigkeiten der Suszeptibilitäten für verschiedene Verhältnisse d/R dargestellt. Bei einem Verhältnis von $1/10$ weicht der Verlauf der Suszeptibilität nur wenig vom ebenen Fall ab. Sind R und d von der gleichen Größenordnung, so weicht der Verlauf der Suszeptibilität deutlich von dem "ebenen" Fall ab. Der Sättigungswert bei $T \rightarrow 0$ ist bei $d = R$ auf ca. 60% gegenüber $R \gg d$ reduziert. Die Feldverdrängung wird immer schwächer, wenn der Supraleiter immer dünner wird, obwohl der Effekt des "overscreening" bei dünnen Proben immer stärker wird (siehe Abb. 4.2, rechtes Bild).

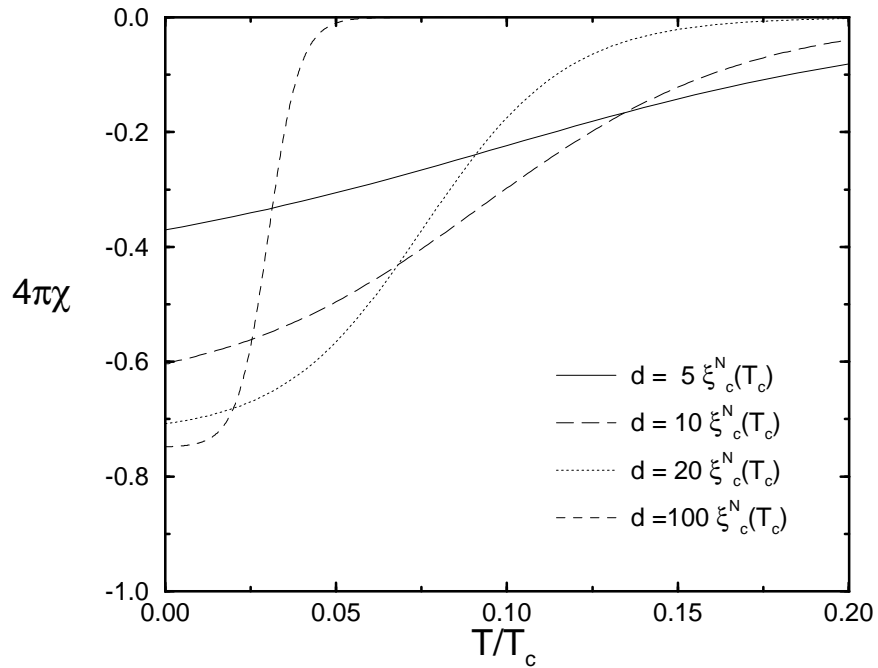


Abbildung 4.3: Suszeptibilität der Normalleiterschicht in Abhängigkeit der Schichtdicke d . In allen Kurven ist $R \gg d$ und $K = 1$.

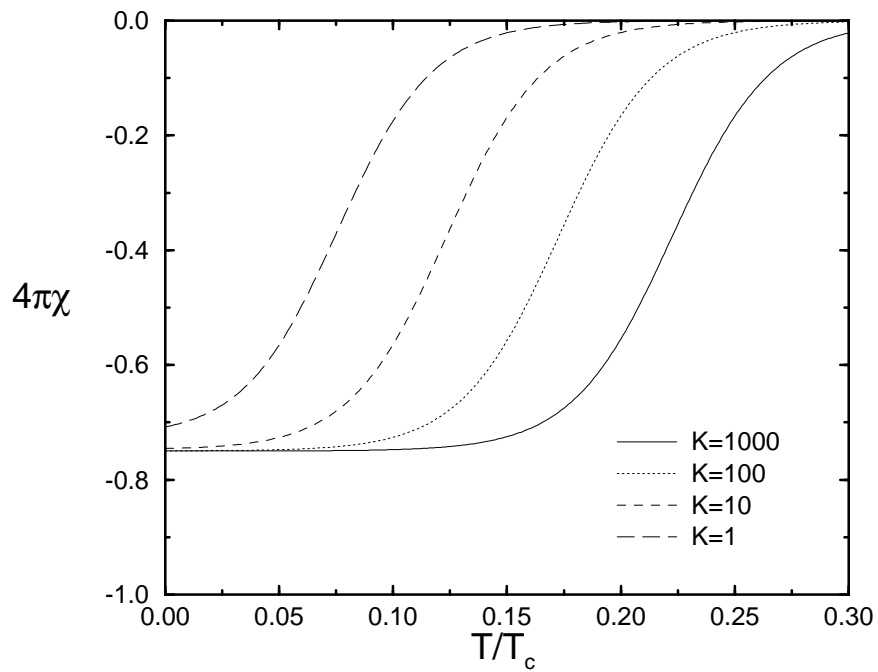


Abbildung 4.4: Suszeptibilität der Normalleiterschicht in Abhängigkeit des Materialparameters K . In allen Kurven: $R \gg d$ und $d = 20 \xi_c^N(T_c)$.

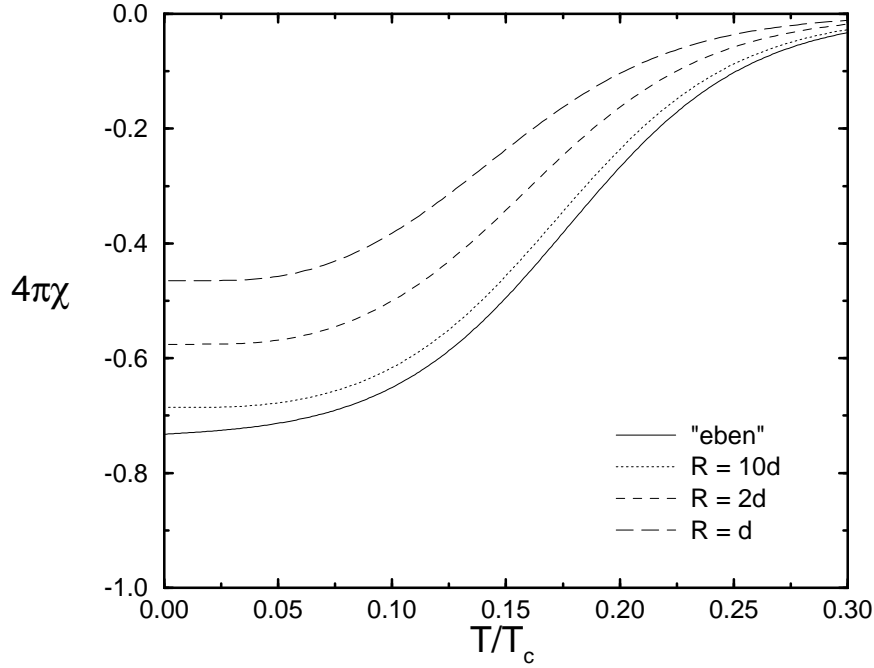


Abbildung 4.5: Suszeptibilität der Normalleiterschicht in Abhängigkeit des Radius des Supraleiters R . In allen Kurven ist $d = 10\xi_c^N(T_c)$ und $K = 10$.

4.3.2 Starkes Magnetfeld

In diesem Fall wird die volle Abhängigkeit der Green-Funktion vom Vektorpotential mitgenommen, jedoch wird nur der "ebene" Fall $R \gg d$ betrachtet. Die Annahme, daß für die Aharonov-Bohm-Phase $e \int_R^{R+d} A(r) dr \ll 1$ gilt, wird fallengelassen und die Stromdichte (4.8) wird numerisch berechnet. Auch in diesem Fall ist die Stromdichte in der N-Schicht räumlich konstant und es ergibt sich die gleichen Verläufe des B -Feldes wie in Abb. 4.1 (rechtes Bild). Aus der Lösung der Maxwellgleichung ergibt sich die Selbstkonsistenzgleichung

$$\bar{A} = \frac{d^2}{2} H - \frac{d^3}{3} 4\pi j^n(\bar{A}) \quad (4.21)$$

für $\bar{A} = \int_0^d A(R+x) dx$. Da (4.8) für $e\bar{A} \gg 1$ jedoch eine sehr stark oszillierende Funktion ist, kann der selbstkonsistente Wert nicht mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden. Mit Hilfe von (4.21) läßt sich aber die Suszeptibilität und das Magnetfeld in Abhängigkeit von \bar{A} parametrisieren und so die Suszeptibilität in Abhängigkeit vom Magnetfeld berechnen. Man findet

$$\chi(\bar{A}) = -\frac{j^n(\bar{A})d}{2H(\bar{A})} \quad (4.22)$$

$$H(\bar{A}) = \frac{2}{d^2} \bar{A} + 4\pi j^n(\bar{A}) \frac{2d}{3}. \quad (4.23)$$

In Abb. 4.6 ist die Suszeptibilität als Funktion vom angelegten Magnetfeld für eine Normalleiterschichtdicke $d = 20\xi_c^N(T_c)$ und $K = 10$ bei verschiedenen Tem-

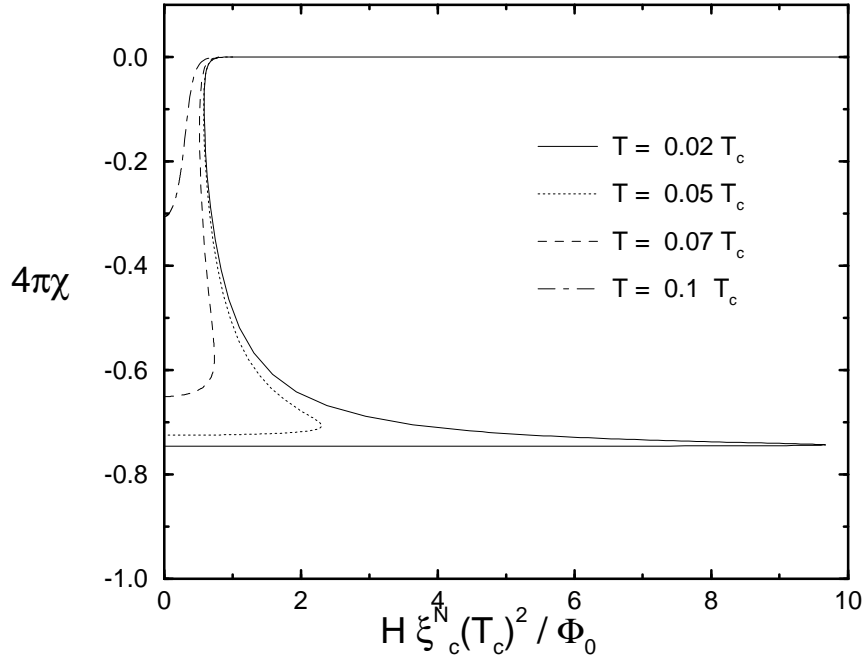


Abbildung 4.6: Suszeptibilität in Abhängigkeit vom äußeren Feld bei verschiedenen Temperaturen. In allen Kurven ist $d = 20\xi_c^N(T_c)$ und $K = 10$.

peraturen dargestellt. Bei $T = 0.02T_c$ gibt es einen großen Feldbereich, in dem es mehrere Lösungen gibt. Bei einer Lösung ist die Feldverdrängung maximal, während sie bei der anderen praktisch Null ist. Bei den höheren Temperaturen wird dieser Bereich immer kleiner, und bei $T = 0.1T_c$ ist der Bereich schließlich vollständig verschwunden.

Der Ast mit der negativen Steigung ist aus thermodynamischen Gründen instabil. Die Suszeptibilität springt bei einem bestimmten Magnetfeld von dem einen Ast auf den anderen. Dieser Wert müßte durch eine Minimierung der Energie ermittelt werden. Auf dem unteren Ast muß magnetische Energie bezahlt werden, und es wird Kondensationsenergie gewonnen. Das von Eilenberger angegebene Funktional [3] für die freie Energiedifferenz zwischen normal- und supraleitendem Zustand liefert für das gegebene System keine sinnvollen Ergebnisse und konnte deshalb nicht für eine Abschätzung verwendet werden. Die Frage nach einem geeigneten Funktional wurde in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt.

Unabhängig davon kann man aber die Aussage machen, daß, wenn das Magnetfeld schnell hoch- bzw. runtergefahren wird, ein “Überhitzungs”- bzw. “Unterkühlungs”-Effekt eintreten kann. Das System bleibt auf dem oberen oder unteren Ast, obwohl der jeweils andere Ast energetisch günstiger ist. Diese Effekte sind experimentell auch beobachtet worden [8, 6].

Kapitel 5

Meißner-Effekt im schmutzigen Grenzfall

In diesem Kapitel soll die Suszeptibilität für die Geometrie aus Abb. 2.2 im Grenzfall $R \gg d$ berechnet werden. Zunächst werden die zu lösenden Gleichungen aufgestellt, dann in linearer Antwort numerisch gelöst und die Suszeptibilitäten berechnet. Im letzten Abschnitt wird die volle Magnetfeldabhängigkeit mitgenommen und die nichtlineare Suszeptibilität berechnet.

5.1 Lösung der Usadel-Gleichungen

In diesem Kapitel betrachten wir den Grenzfall kleiner freier Weglängen, wobei beachtet werden muß, daß diese Bedingung allgemein bedeutet $1/\tau_{el} \gg$ alle anderen Energieskalen sein muß. In einem Normalleiter ist eine relevante Skala die Temperatur, so daß dort die Bedingung $\tau_{el}T \ll 1$ lautet. Dies hat zur Folge, daß dieser Grenzfall, wenn überhaupt Verunreinigungen vorhanden sind, immer bei tiefen Temperaturen erreicht wird. Die charakteristische Länge in diesem Fall ist die schmutzige thermische Kohärenzlänge $\xi_d^N(T) = (D/2\pi T)^{-1/2}$.

Auch in diesem Fall wurde die symmetrische Eichung (4.1) und ein stufenförmiges Paarpotential (4.2) gewählt. Die Eilenberger-Gleichung geht über in die Usadel-Gleichung (3.17), die im Fall $R \gg d$ die eindimensionale Form

$$\begin{aligned} 2\omega_\mu F_{\omega_\mu}(r) - 2\Delta G_{\omega_\mu}(r) + 4De^2 A(r)^2 F_{\omega_\mu}(r) G_{\omega_\mu}(r) \\ = D \left[G_{\omega_\mu}(r) \frac{\partial^2}{\partial r^2} F_{\omega_\mu}(r) - F_{\omega_\mu}(r) \frac{\partial^2}{\partial r^2} G_{\omega_\mu}(r) \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

annimmt. Die Randbedingungen sind

$$F_{\omega_\mu}(R) = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + \omega_\mu^2}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial r} F_{\omega_\mu}(R + d) = 0. \quad (5.2)$$

Das Magnetfeld ist durch die Maxwell-Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} A(r) = 32\pi^2 e^2 N(0) D T \sum_{\omega_\mu > 0} F_{\omega_\mu}(r)^2 A(r) \quad (5.3)$$

mit den Randbedingungen

$$A(R) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial r} A(R + d) = H \quad (5.4)$$

bestimmt. Aus der Lösung dieser Gleichung erhält man die Suszeptibilität durch

$$\chi = \frac{-1}{4\pi} \left(\frac{A(R + d) - A(R)}{Hd} - 1 \right). \quad (5.5)$$

5.2 Schwaches Magnetfeld

In diesem Fall wird der Term mit A^2 in (5.1) vernachlässigt. Die Usadel-Gleichung wird dann unabhängig vom Magnetfeld und das Gleichungssystem linear im Magnetfeld. Diese Bedingung ist äquivalent zu $H \ll \Phi_0 / \xi_d^N(T_c) d$.

Die Lösung der Gleichungen erfolgt numerisch mit dem in Anhang B näher beschriebenen Relaxationsverfahren [21]. Dazu führt man dimensionslose Größen $t = T/T_c$ für die Temperatur und $\rho = r/\xi_d^N(T_c)$ für die Länge ein. Setzt man

$$F_{\omega_\mu}(r) = \sin(\alpha_\mu(r)),$$

so ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{d^2 \alpha_\mu(\rho)}{d\rho^2} = t(2\mu + 1) \sin(\alpha_\mu(\rho))$$

und

$$\frac{d^2 A}{d\rho^2} = \frac{\xi_d^N(T_c)^2}{\lambda^2(\rho)} A(\rho), \quad (5.6)$$

wobei dadurch die (inverse) lokale Eindringtiefe

$$\frac{1}{\lambda(\rho)^2} = \frac{K_d}{\xi_d^N(T_c)^2} t \sum_{\mu=0}^{\infty} \sin^2(\alpha_\mu(\rho)) \quad (5.7)$$

definiert ist. Hierbei ist $K_d = 16\pi e^2 N(0) D^2$ eine dimensionslose Materialkonstante, die sich mit Hilfe von λ_N durch

$$K_d = \frac{12}{\pi^2} \left(\frac{l_{el}}{\lambda_N} \right)^2$$

ausdrücken läßt. Die Werte für K_d sind stark von dem Verunreinigungsgrad abhängig. Da λ_N in normalen Metallen von der Ordnung $\sim 1 - 100 \text{ \AA}$ ist, sind für K_d Werte zwischen 1 und 1000 realistisch.

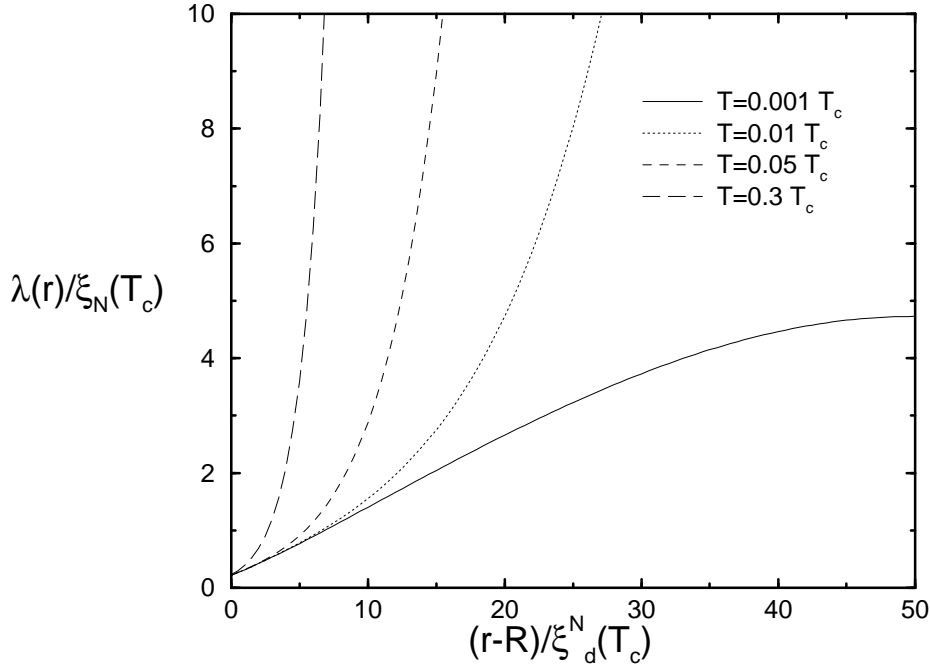


Abbildung 5.1:

Lokale Eindringtiefe in der Normalleiterschicht für $d = 50\xi_d^N(T_c)$ und $K_d = 100$.

In den Abbildungen 5.1-5.3 sind einige Lösungen für eine Schichtdicke $d = 50\xi_d^N(T_c)$ und Materialkonstante $K_d = 100$ bei verschiedenen Temperaturen dargestellt. In Abb. 5.1 ist die (vom Magnetfeld unabhängige) Eindringtiefe in der Normalleiterschicht aufgetragen. Die zugehörigen Feldverläufe und Stromdichten sind in Abb. 5.2 bzw. Abb. 5.3 gezeigt, wobei die Stromdichte durch

$$4\pi j(r) = \frac{1}{\lambda^2(r)} A(r) \quad (5.8)$$

gegeben ist.

Bei allen Temperaturen hat die Eindringtiefe an der Grenze zum Supraleiter den gleichen Wert von $\approx 0.2\xi_d^N(T_c)$. Dies entspricht aufgrund der idealen Randbedingung einem Supraleiter mit einem Ginzburg-Landau-Parameter von $\kappa \approx 0.2$, was in einem reinen Metall auch erreicht werden kann.

Bei der tiefsten Temperatur von $T = 0.001T_c$ hat die Eindringtiefe in der Nähe der äußeren Grenzfläche einen konstanten Wert von $\approx 5\xi_d^N(T_c)$ und somit wird das Feld exponentiell abgeschirmt. Auch die Stromdichte hat an der Grenzfläche zum Vakuum den größten Wert und fällt dann in der Normalleiterschicht exponentiell ab. Das Verhalten der Normalleiterschicht ist bei dieser Temperatur von der Art eines Londonschen Supraleiters.

Bei $T = 0.01T_c$ ist die Feldverdrängung nicht mehr so stark. Die Eindringtiefe an der äußeren Grenzfläche ist sehr groß und nicht mehr konstant, das Feld fällt näherungsweise linear ab. Der größte Teil des Abschirmstromes fließt in einem mittleren Bereich der Normalleiterschicht, und die Eindringtiefe geht stark zurück. Das Feld

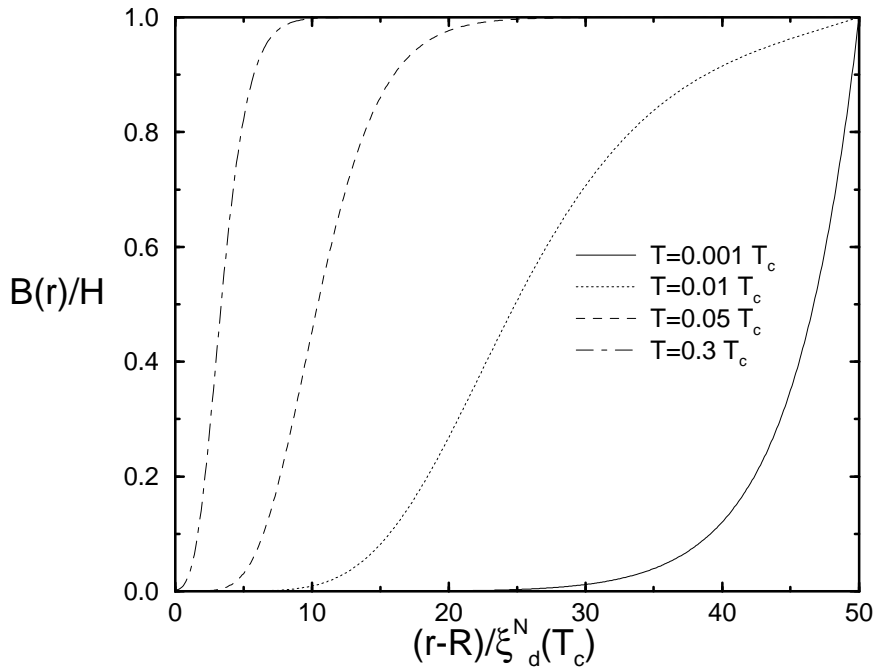


Abbildung 5.2:
B-Feldverlauf in der Normalleiterschicht für $d = 50\xi_d^N(T_c)$ und $K_d = 100$.

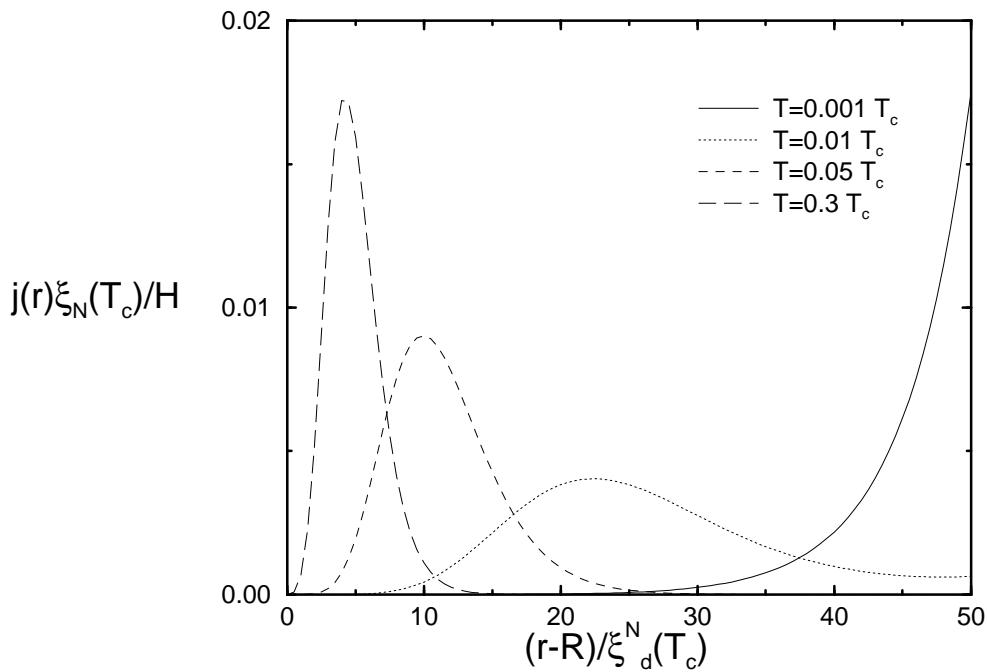


Abbildung 5.3:
Stromdichte in der Normalleiterschicht für $d = 50\xi_d^N(T_c)$ und $K_d = 100$

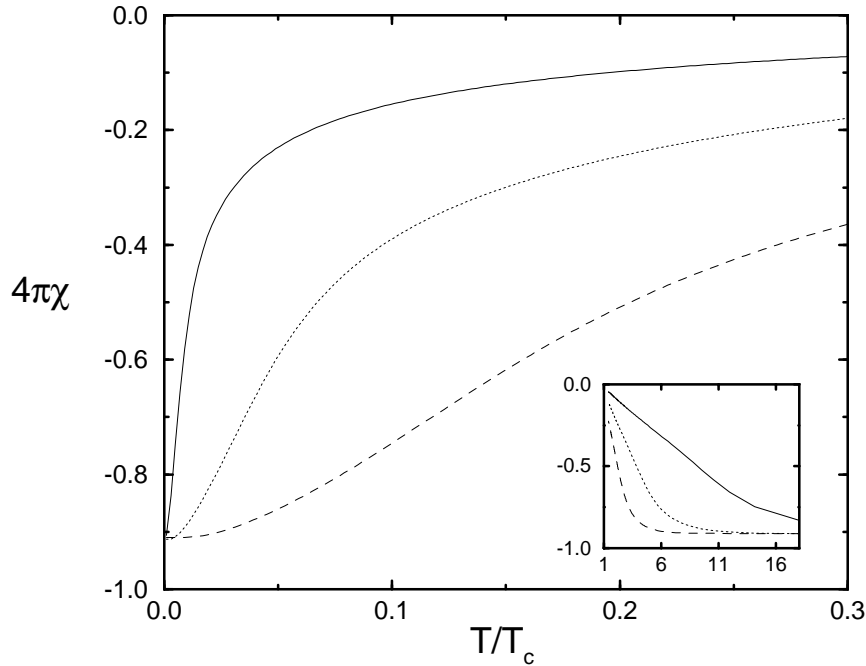


Abbildung 5.4:

Suszeptibilität der Normalleiterschicht für verschiedene Schichtdicken als Funktion von T/T_c (großes Bild), bzw. als Funktion von $(T/T_c)^{-1/2}$ (kleines Bild). Parameter $(d/\xi_d^N(T_c), K_d)$: — (50,100), \cdots (20,100) und --- (10,100).

wird unterdrückt, bis es schließlich auf Null abgefallen ist und dann konsequenterweise auch kein Abschirmstrom mehr fließt.

Bei noch höheren Temperaturen fließt der Abschirmstrom nur noch in der unmittelbaren Nähe der Grenzfläche zum Supraleiter. Die lokale Eindringtiefe wird außerhalb dieses Bereiches sehr groß, und das Feld wird praktisch nicht unterdrückt.

In Abb. 5.4 sind die Suszeptibilitäten für verschieden dicke Normalleiterschichten und eine Materialkonstante $K_d = 100$ in Abhängigkeit der Temperatur aufgetragen. Im Gegensatz zum reinen Grenzfall erfolgt kein plötzliches Einsetzen der Feldverdrängung, sondern die Suszeptibilität hat schon bei hohen Temperaturen einen endlichen Wert, der allmählich größer wird, bis schließlich bei sehr tiefen Temperaturen ein Sättigungswert erreicht wird.

Diese Verhalten läßt sich im Bild der lokalen Eindringtiefe verstehen. Bei hohen Temperaturen (allerdings nicht so hoch, daß der Abfall des Ordnungsparameters im Supraleiter beachtet werden müßte) ist die Eindringtiefe in der Nähe der N-S-Grenzfläche sehr klein, dort kann also immer ein Abschirmstrom fließen. Die Suszeptibilität ist also auch hier schon von Null verschieden. Auf der anderen Seite ist bei tiefen Temperaturen die Eindringtiefe an der Grenzfläche zum Vakuum konstant, aber endlich, so daß das Feld immer ein wenig eindringt. Die Suszeptibilität erreicht demnach nie ganz $-1/4\pi$.

Im kleinen Bild in Abb. 5.4 sind die Suszeptibilitäten für die gleichen Parameter wie im großen Bild als Funktion von $(T/T_c)^{-1/2}$ dargestellt. Diese Auftragung wurde in Anlehnung an einige Experimente gewählt. Außerhalb des Sättigungsbereiches

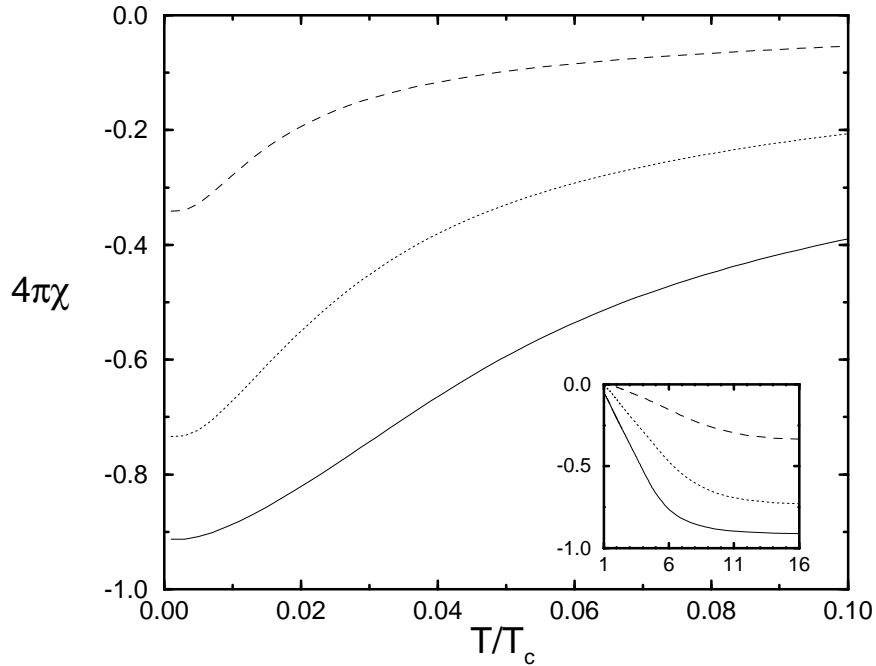


Abbildung 5.5:

Suszeptibilität der Normalleiterschicht für verschiedene Schichtdicken als Funktion von T/T_c (großes Bild), bzw. als Funktion von $(T/T_c)^{-1/2}$ (kleines Bild). Parameter $(d/\xi_d^N(T_c), K_d)$: — (20,100), \cdots (20,10) und --- (20,1).

ist die Suszeptibilität proportional zu $[(T/T_c)^{-1/2} - \text{const.}]$. Dies unterstreicht die Rolle der charakteristischen Länge $\xi_d^N(T) = (D/2\pi T)^{1/2}$.

In Abb. 5.5 ist die Suszeptibilität für verschiedene Materialparameter als Funktion der Temperatur aufgetragen. Man sieht deutlich, daß der Sättigungswert bei $T = 0$ stark von der Materialkonstanten abhängt. Durch Vergleich mit Abb. 5.4 ergibt sich, daß er nur wenig von der Schichtdicke abhängt. Dies liegt daran, daß hier anders als in einem echten Supraleiter die Eindringtiefe an der Grenzfläche zum Vakuum mit zunehmender Schichtdicke größer wird. Die Suszeptibilität einer endlich dicken Schicht ist jedoch $\approx -(1 - \lambda/d)/4\pi$. In einem echten Supraleiter geht die Suszeptibilität gegen $-1/4\pi$, wenn der Supraleiter dicker wird. In dem Normalleiter ist die Eindringtiefe proportional zu d , so daß die Suszeptibilität unabhängig von der Schichtdicke ist.

5.3 Starkes Magnetfeld

In diesem Abschnitt wird die Annahme, daß die Green-Funktion vom Magnetfeld unabhängig ist, fallengelassen. Es werden also stärkere Felder angenommen, jedoch nicht so stark, daß das kritische Feld des Supraleiters erreicht wird. Daher ist es gerechtfertigt, die Unterdrückung der Paaramplitude im Supraleiter durch das Magnetfeld zu vernachlässigen.

Das Problem wird zu einem Selbstkonsistenzproblem, das iterativ gelöst wird. Die Usadel-Gleichungen (5.1) in dimensionslosen Einheiten mit dem Magnetfeld

$a(\rho) = A(r) \epsilon \xi_d^N(T_c)$ lauten

$$\frac{d^2 \alpha_\mu(\rho)}{d\rho^2} = t(2\mu + 1) \sin(\alpha_\mu(\rho)) + a^2(\rho) \sin(2\alpha_\mu(\rho)), \quad (5.9)$$

wobei $\sin(\alpha_\mu(\rho)) = F_{\omega_\mu}(r)$ gesetzt wurde, und die gleichen dimensionslosen Einheiten wie im letzten Abschnitt gewählt wurden. Die Rolle der Selbstkonsistenzgleichung hat die Maxwell-Gleichung

$$\frac{d^2 a(\rho)}{d\rho^2} = \frac{\xi_d^N(T_c)^2}{\lambda^2(\rho)} a(\rho), \quad (5.10)$$

die hier die Form der London-Gleichung mit einer ortsabhängigen Eindringtiefe, definiert durch (5.7), hat. Die Einheit des Vektorpotentials ist gegeben durch $1/\epsilon \xi_d^N(T_c)$. Das entspricht einem dimensionslosen Magnetfeld $b = da/d\rho = B\pi \xi_d^N(T_c)^2/\Phi_0$.

Die Iteration erfolgt, indem man zunächst für ein gegebenes Magnetfeld die Usadel-Gleichungen (5.9) löst, dann daraus die inverse Eindringtiefe gemäß (5.7) berechnet und damit die Maxwell-Gleichung löst. Dann beginnt man mit dem Iterationszyklus von vorne. Dabei ist für das verwendete Relaxationsverfahren wesentlich, daß eine möglichst gute Schätzung vorgegeben wird [21]. Es stellt sich heraus, daß dieses Gleichungssystem für tiefe Temperaturen in einem bestimmten Magnetfeldbereich mehrere Lösungen besitzt, wie schon in [2] für den linearisierten Fall gefunden wurde.

In Abb. 5.6 sind zwei solche Lösungen dargestellt, die zum gleichen äußeren Feld $H = \Phi_0/2\xi_d^N(T_c)^2$ gehören. Bei der mit *I* bezeichneten Lösung sind Eindringtiefe und Magnetfeld durchgezogen gezeichnet. Die Eindringtiefe ist praktisch nicht beeinflusst vom Magnetfeld, insbesondere ist sie an der äußeren Grenzfläche so klein und konstant, daß das Feld dort exponentiell abgeschirmt wird. Bei der mit *II* bezeichneten Lösung sind Eindringtiefe und Magnetfeld gestrichelt dargestellt. Die Eindringtiefe ist in einem Teilbereich des Normalleiters sehr groß, und es findet keine Abschirmung statt, das Magnetfeld hat den Vakuumwert. Sobald die Eindringtiefe kleiner wird, fällt das Magnetfeld ab. In dem Bereich, in dem das Magnetfeld dann schließlich verschwunden ist, nimmt die Eindringtiefe dann ihren "ungestörten" Wert an.

Daß es zwei Lösungen gibt liegt daran, daß zwei Energiebeiträge, nämlich magnetische Feldenergie und Kondensationsenergie, miteinander konkurrieren. Bei Lösung *I* muß weniger Feldenergie bezahlt werden, da das Feld nicht so stark verdrängt wird, dafür wird weniger Kondensationsenergie gewonnen, da die inverse Eindringtiefe, die mit der Paaramplitude zusammenhängt, unterdrückt ist. Dem steht bei Lösung *II* die vollständige Kondensationsenergie gegenüber, die mit der zu bezahlenden magnetischen Feldenergie konkurrieren muß. Um zu entscheiden, welche Lösung tatsächlich die geringere Energie hat, müßte die freie Energie berechnet werden. Die Frage nach einem geeigneten Freie-Energie-Funktional wurde hier nicht weiter verfolgt.

Bei der numerischen Lösung ergeben sich Probleme, da es nicht vorhersehbar ist, welche Lösung durch diese einfache Iteration gefunden wird und ob die Iteration

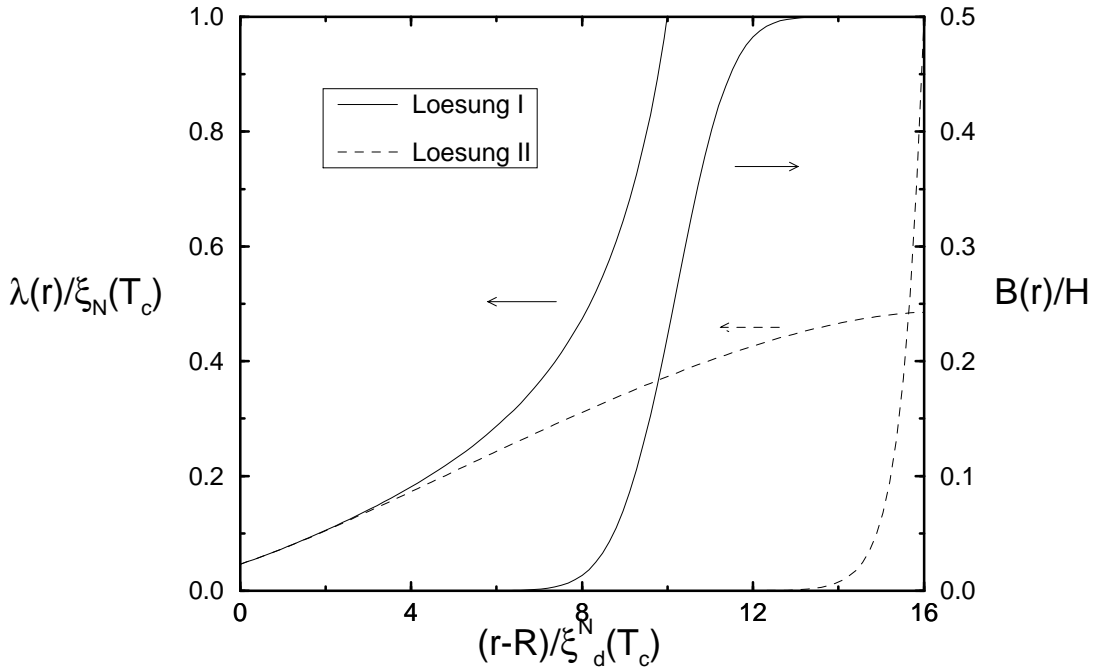


Abbildung 5.6: B-Feldverlauf in der Normalleiterschicht bzw. Verlauf der inversen Eindringtiefe für Parameter $T = 0.005T_c$, $H = \Phi_0/2\xi_d^N(T_c)^2$, $d = 16\xi_d^N(T_c)$ und $K_d = 1200$

überhaupt konvergiert. Aus diesem Grund wird ein anderes Iterationsverfahren verwendet, bei dem mit veränderlichem Magnetfeld gearbeitet wird. Dieses Verfahren ist im Anhang B.2 genauer beschrieben.

In Abb. 5.7 sind einige Ergebnisse dargestellt, die mit diesem Verfahren gewonnen wurden. Bei der tiefsten Temperatur ist der Bereich mit zwei Lösungen am größten. Beim Einschaltvorgang bleibt die Suszeptibilität auf ihrem Maximalwert von fast 1 und springt dann auf etwa 0.5. Sie springt nicht gleich auf 0 zurück, da die Eindringtiefe immer kleiner wird, je näher man der Grenzfläche kommt, und somit das Feld immer noch aus einem großen Bereich verdrängt wird. Man kann sich ein lokales kritisches Feld definieren, das zum Quadrat der inversen Eindringtiefe proportional ist. Bei noch höheren Magnetfeldern dringt das Feld so weit ein, bis es die Stelle erreicht, bei dem die Feldstärke gerade dem lokalen kritischen Feld entspricht. Beim Ausschaltvorgang steigt die Suszeptibilität langsam an und springt dann bei einem wesentlich niedrigeren Wert des äußeren Feldes auf ihren Maximalwert. Der Sprung ist jedoch kleiner als beim Einschaltvorgang. Bei höheren Temperaturen wird der Bereich mit zwei Lösungen kleiner. Der Sprung beim Ausschaltvorgang bleibt bei tiefen Temperaturen praktisch unverändert, während der Sprung beim Einschaltvorgang bei tieferen Temperaturen bei immer größeren Feldstärken erfolgt. Bei der höchsten Temperatur gibt es keinen Bereich mit zwei Lösungen mehr, und Ein- und Ausschaltvorgang liegen auf der gleichen Kurve.

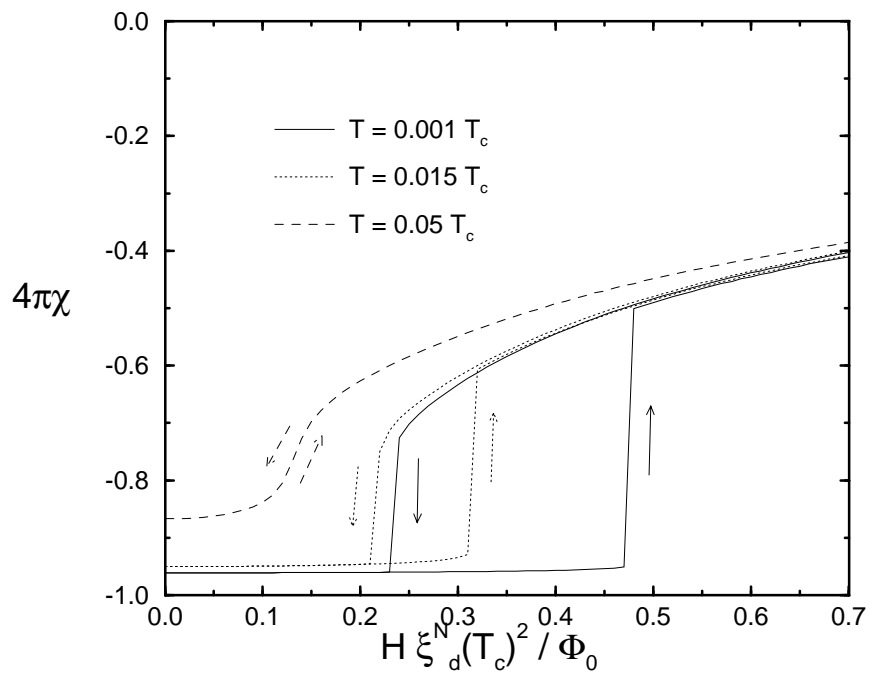


Abbildung 5.7: Suszeptibilität der Normalleiterschicht in Abhängigkeit des angelegten Feldes H für verschiedene Temperaturen. Schichtdicke $d = 16\xi_d^N(T_c)$, Materialkonstante $K_d = 500$. Die Pfeile zeigen die Richtung an, in der die jeweiligen Äste durchlaufen wurden.

Kapitel 6

Vergleich mit Experimenten und Diskussion

6.1 Meißner-Effekt

Bis hier wurde die quasiklassische Theorie auf den Meißner-Effekt angewendet. Jetzt sollen die Ergebnisse mit einigen Experimenten verglichen werden. Dazu werden zwei Größen α und χ_0 eingeführt. α ist definiert über $\chi(T) \propto T^{-\alpha}$ für Temperaturen oberhalb des Sättigungsbereiches ($\xi_d^N(T) > d$) und unterhalb von T_c . χ_0 hängt mit dem Sättigungswert der Suszeptibilität bei $T = 0$ gemäß $\chi_0 = -4\pi\chi(T = 0)$ zusammen. $\chi_0 = 1$ entspricht also einem perfekten Diamagneten.

In den Experimenten wurden in verschiedenen Proben Werte für α zwischen 0.5 und 2.0 gefunden. In sehr schmutzigen Proben wurde der vorhergesagte (siehe kleines Bild in Abb. 5.4) Exponent $\alpha = 0.5$ gefunden [5]. In weiteren Experimenten [7, 6] wurden teilweise deutlich höhere Werte für α gefunden. Diese Proben sind durch Ausheilen wesentlich reiner (die freien Weglängen liegen im Bereich der Schichtdicken) gemacht worden. Da jedoch noch ein algebraisches Verhalten gefunden wurde, sind diese Proben noch nicht im reinen Grenzfall, bei dem die Theorie eine exponentielle Temperaturabhängigkeit vorhersagt. Die Proben mit den höheren Werten von α liegen vermutlich in dem Zwischenbereich zwischen schmutzigem und reinem Grenzfall, der hier nicht untersucht wurde.

Daß die meisten Proben im schmutzigen Fall sind bzw. die Verunreinigungen eine wesentliche Rolle spielen, sieht man daran, daß in allen Fällen eine fast vollständige Feldverdrängung erreicht wurde. Die gemessenen Werte von χ_0 liegen bei 0.95-1.0, die Feldverdrängung ist also praktisch vollständig. Dies deckt sich mit den Voraussagen der schmutzigen Theorie, und diese scheint damit auch im mittleren Verschmutzungsbereich noch gültig zu sein. Die vorausgesagte Sättigung der Suszeptibilität bei 0.75 im "ebenen" reinen Grenzfall ist bisher nicht beobachtet worden.

In stärkeren Magnetfeldern sagt die Theorie in beiden Grenzfällen ein hysteretisches Verhalten voraus, wobei die Suszeptibilität im reinen Fall mit zunehmendem Feld bei einem bestimmten Wert von ihrem Sättigungswert bei tiefen Temperaturen

auf 0 zurückspringen sollte. Im schmutzigen Grenzfall springt die Suszeptibilität bei einem bestimmten Feld von ihrem Maximalwert auf ca. 0.5 dieses Wertes zurück und geht dann langsam auf 0 zurück. In beiden Fällen ist die Hysterese stark temperaturabhängig. In den Experimenten wurde ein hysteretisches Verhalten gesehen. Dabei wurde in sehr schmutzigen Proben ein allmähliches Zurückgehen der Suszeptibilität mit stärkerem Feld beobachtet, wie es die Theorie im schmutzigen Grenzfall voraussagt. Bei weniger stark verunreinigten Proben wurde bei tiefen Temperaturen ein plötzliches Zurückgehen der Suszeptibilität auf 0 als Funktion des angelegten Feldes beobachtet. Diese Proben sind jedoch nicht im reinen Grenzfall, da dort die Feldverdrängung fast vollständig ist.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die hier verwendete Theorie die Experimente nur im schmutzigen Grenzfall ausreichend beschreibt. Dies ist darauf zurückzuführen, daß meistens ein mittlerer Verschmutzungsgrad vorzuliegen scheint und der elektrische Kontakt durch das Ausheilen verschlechtert wird, was zu einem endlichen Reflektionskoeffizienten führt [22]. Dieser kann auch durch unterschiedliche Fermigeschwindigkeiten hervorgerufen werden. Diese Effekte wurden in der Theorie nicht berücksichtigt.

6.2 Die Tieftemperaturanomalie

Das unerwartete Verhalten, daß bei sehr tiefen Temperaturen die Suszeptibilität wieder auf Null zurückgeht, das von Mota et al. [9] gemessen wurde, konnte mit der quasiklassischen Theorie nicht erklärt werden. Die Suszeptibilität geht bei sehr tiefen Temperaturen in keinem der untersuchten Grenzfälle wieder zurück.

Obwohl im reinen Fall der Effekt des “overscreening” auftritt und das lokale Feld an der N-S-Grenzfläche ein entgegengesetztes Vorzeichen wie das äußere Feld hat, geht die Suszeptibilität bei tiefen Temperaturen nicht zurück. Auch die Hysterese liefert keine Erklärung. Der Sprung in der Suszeptibilität erfolgt bei tieferen Temperaturen bei immer höheren Feldstärken.

Ein mögliche Erklärung wären Oberflächeneffekte, die ein paramagnetisches Signal geben könnten. Diese lassen sich mit den von Dingle in [23] angegebenen Ausdrücken für $T = 0$ mit dem Landau-Diamagnetismus, der schon um einen Faktor 10^{-3} kleiner als perfekter Diamagnetismus ist, vergleichen. Das Verhältnis von dem Oberflächenbeitrag $M_{||}$ zum Volumenbeitrag M_V zum magnetischen Moment eines Hohlzylinder der Dicke d in einem Feld H ist gebendurch

$$\frac{|M_{||}|}{|M_V|} \approx 1.5 \frac{k_F^{5/3} \Phi_0^{4/3}}{H^{4/3} d}.$$

Für typische experimentelle Werte von $d \approx 1\mu$ und $H \approx 1mG$ und einen Fermi-Wellenvektor $k_F = \text{\AA}^{-1}$ ergibt $M_{||} \approx 10^{-10} M_V$. Dieser Beitrag ist also verschwindend gering.

Eine weitere Möglichkeit wäre, daß sogenannte mesoskopische Dauerströme (siehe z.B. [24, 25]) für dieses Verhalten verantwortlich sind. Um eine Abschätzung der

Größe im Vergleich zu supraleitenden diamagnetischen Dauerströmen zu bekommen, betrachten wir die lineare magnetische Antwort eines normalleitenden Ringes auf einen angelegten Fluß. Der Strom ist im Fall eines diffusiven Ringes mit $l_{el} \ll L$, wobei L der Umfang des Ringes ist, gegeben durch [24]

$$I \approx \frac{e E_c \Phi}{\Phi_0}.$$

Hierbei ist $E_c = D/L^2$ die Thouless-Energie und Φ der von außen angelegte Fluss. Der induzierte Fluß Φ_i ist, bis auf logarithmische Korrekturen, $I L$. Die magnetische Antwort ist damit

$$\frac{\Phi_i}{\Phi} = \chi_0 = \frac{e E_c L}{\Phi_0} \approx \alpha \frac{v_F}{c} \frac{l_{el}}{L},$$

wobei $\alpha = 1/137$ die Feinstrukturkonstante ist. Für typische experimentelle Werte von $l/L = 1/100$ ist dieser Wert um 6 Größenordnungen kleiner als im supraleitenden Fall, wo χ_0 von der Ordnung 1 ist.

Möglicherweise beeinflussen diese Dauerströme trotz allem die supraleitenden Eigenschaften der normalleitenden Schicht. Da sowohl Supraleitung als auch die mesoskopischen Dauerströme eng mit der phasenkohärenten Bewegung der Elektronen zusammenhängen, wäre denkbar, daß sich die Effekte gegenseitig beeinflussen. Die konventionelle quasiklassische Theorie ist in jedem Fall nicht ausreichend, um die Dauerströme zu beschreiben. Die Ursache ist, daß bei der quasiklassischen Theorie durch Integration über die Energie Informationen über das System verloren gegangen sind, die für die mesoskopischen Dauerströme benötigt werden. Dies kann mit der Methode von Ashida et al. [14] gezeigt werden. Die Normierungsbedingung enthält dort einen Phasenfaktor, der Informationen über die genauen Abmessungen des Systems enthält. Vernachlässigt man diese Information, so erhält man die konventionelle quasiklassischen Green-Funktionen und dafür keine Dauerströme mehr.

Ob solche Effekte ausreichen, um die Suszeptibilität bei tiefen Temperaturen vollständig zum Verschwinden zu bringen, müßte eine genauere Untersuchung zeigen.

Kapitel 7

Zustandsdichten im Proximitysystem

In diesem Kapitel soll der Frage nachgegangen werden, wie sich die Zustandsdichte in der Nähe einer N-S-Grenzfläche verhält. Hierbei soll speziell auf den schmutzigen Grenzfall eingegangen werden, da dieser in einem Experiment untersucht werden soll [10]. Dazu wird die Methode der Realzeit-Green-Funktionen verwendet.

7.1 Green-Funktionen in Realzeit

Um die Zustandsdichte zu berechnen, benötigt man die retardierte Realzeit-Green-Funktion $G_E^R(\mathbf{r})$, die aus der Imaginärzeit-Green-Funktion $G_{\omega_\mu}(\mathbf{r})$ durch analytische Fortsetzung $\omega_\mu \rightarrow -iE + 0$ gewonnen werden kann. Da die Lösung numerisch erfolgt, ist es jedoch einfacher die Bewegungsgleichung als die Green-Funktion analytisch fortzusetzen. Es wird also die analytisch fortgesetzte Usadel-Gleichung verwendet werden. Die so gewonnene Gleichung stimmt mit der im Keldysh-Formalismus erhaltenen im Grenzfall $T = 0$ überein [26]. Addiert man noch eine inelastische Streurrate Γ_{in} , um die Singularitäten der Green-Funktionen in die komplexe Ebene zu verschieben, und eine paarbrechende Streurrate Γ_s , um mögliche magnetische Verunreinigungen einzubeziehen, so ergibt sich

$$\frac{1}{2}D (G_E^R(\mathbf{r}) \nabla^2 F_E^R(\mathbf{r}) - F_E^R(\mathbf{r}) \nabla^2 G_E^R(\mathbf{r})) = \quad (7.1)$$
$$(-iE + \Gamma_{in}) F_E^R(\mathbf{r}) - \Delta(\mathbf{r}) G_E^R(\mathbf{r}) + 2\Gamma_s G_E^R(\mathbf{r}) F_E^R(\mathbf{r}).$$

$$G_E^R(\mathbf{r}) = \sqrt{1 - |F_E^R(\mathbf{r})|^2} \quad \Gamma_s = \frac{1}{2\tau_s} \quad \Gamma_{in} = \frac{1}{2\tau_{in}}$$

Diese Gleichungen werden ergänzt durch die Selbstkonsistenzgleichung (bei $T=0$)

$$\Delta(\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{r}) \int_0^{\omega_c} dE \operatorname{Im} F_E^R(\mathbf{r}). \quad (7.2)$$

Hierbei ist λ die ortsabhängige Paarwechselwirkung und ω_c eine Abschneide-Energie von der Ordnung der Debye-Energie. In normalleitenden Bereichen ist $\lambda(\mathbf{r}) = 0$ und damit die Selbstkonsistenzgleichung mit $\Delta = 0$ automatisch erfüllt.

In Supraleitern betrachtet man zunächst den BCS-Grenzfall

$$F(E) = \Delta/(\Delta^2 - E^2)^{1/2}. \quad (7.3)$$

Damit ergibt sich die Identität

$$1 = \lambda \operatorname{arcosh} \left(\frac{\omega_c}{\Delta} \right), \quad (7.4)$$

mit deren Hilfe man die Kopplungskonstante aus Gl. (7.2) eliminieren kann. Mit Δ wird im folgenden das BCS-Gap bezeichnet. Die endgültige Form der Selbstkonsistenzgleichung im supraleitenden Teil ist dann

$$\Delta(\mathbf{r}) = \frac{\int_0^{\omega_c} dE \operatorname{Im} F_E^R(\mathbf{r})}{\operatorname{arcosh} \left(\frac{\omega_c}{\Delta} \right)}. \quad (7.5)$$

Im folgenden soll ein N-S-Doppelschichtsystem, das in der y - z -Ebene translationsinvariant ist, betrachtet werden, wobei die supraleitende Schicht im Bereich $-L_s \leq x \leq 0$ und die normalleitende Schicht im Bereich $0 \leq x \leq L_n$ ist. Dann ist Gl. (7.1) eindimensional. Die Randbedingungen für dieses System sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F_E^R(x)|_{x=-L_s} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} F_E^R(x)|_{x=L_n} &= 0 \\ F_E^R(0+) &= F_E^R(0-). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Die Selbstkonsistenzgleichung für dieses Problem lautet dann

$$\Delta(x) = \Theta(-x) \frac{\int_0^{\omega_c} dE \operatorname{Im} F_E^R(x)}{\operatorname{arcosh} \left(\frac{\omega_c}{\Delta} \right)}. \quad (7.7)$$

Die Gleichungen wurden numerisch gelöst, d.h. es wurde zunächst das selbstkonsistente Paarpotential bestimmt, und damit die Zustandsdichten berechnet. Da Energien in Einheiten von Δ gemessen werden, ergibt sich als Längenskala $\xi_d^S = (D/2\Delta)^{1/2}$.

7.2 Selbstkonsistentes Paarpotential

In Abb. 7.1 sind einige Ergebnisse der selbstkonsistenten Rechnung für verschiedene Schichtdicken im Bereich $1 - 10\xi_d^S$ dargestellt. Die x -Koordinate des Bildes ist auf die Supraleiterschichtdicke normiert.

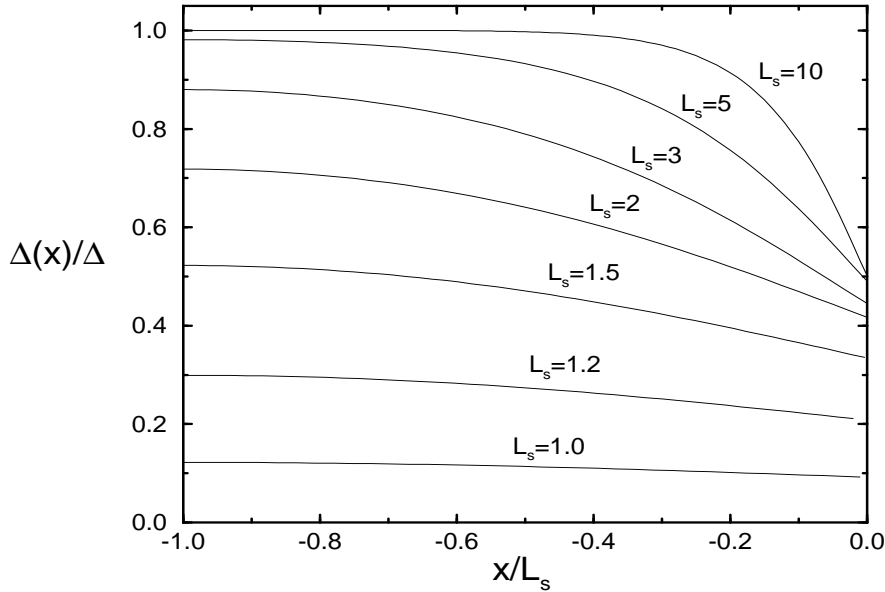


Abbildung 7.1: Selbstkonsistentes Paarpotential in einer dünnen supraleitenden Schicht. Die x -Koordinate ist normiert auf die Schichtdicke. In allen Kurven wurde die Normalleiterschicht so dick gewählt, daß sie als unendlich groß angenommen werden kann.

Bei der dicksten Schicht mit $L_s = 10$ ist eine deutliche Ortsabhängigkeit zu sehen. Die Paaramplitude fällt an der Grenzfläche exponentiell auf ca. 50% ihres “bulk”-Wertes ab, und die Paaramplitude für $x < -5\xi_d^S$ unterscheidet sich praktisch nicht von einer unendlich dicken Supraleiterschicht. Bei $L_s = 5$ macht sich dagegen schon die endliche Schichtdicke bemerkbar. Die Paaramplitude erreicht an keiner Stelle ihren “bulk”-Wert, sondern bleibt selbst bei $x = -L_s$ leicht darunter.

Bei dünneren Schichten geht der Absolutwert des Paarpotentials weiter zurück. Bei einer Schichtdicke von $L_s = 2\xi_d^S$ ist das Paarpotential bei $x = -2\xi_d^S$ auf ca. 70% des “bulk”-Wertes (im Vergleich zu ca. 90% im Falle eines unendlich ausgedehnten Supraleiters) zurückgegangen, während es an der Grenze zum Normalleiter nur noch ca. 40% des “bulk”-Wertes (im Vergleich zu 50%) beträgt.

Auch die Ortsabhängigkeit verschwindet allmählich und das Paarpotential wird bei Schichtdicke unterhalb von $L_s \approx 1.2\xi_d^S$ quasi konstant in der gesamten Supraleiterschicht, wie man es erwartet, wenn die Abmessung des Supraleiters in den Bereich der Kohärenzlänge kommen.

Was passiert, wenn man die Schichtdicke weiter verringert, ist in Abb. 7.2 gezeigt. Hier ist der durchschnittliche Wert des Paarpotentials

$$\Delta_{av.} = \frac{1}{L_s} \int_{-L_s}^0 \Delta(x) dx$$

in Abhängigkeit der Schichtdicke aufgetragen. Unterhalb von ca. $0.95\xi_d^S$ ist keine Lösung des Selbstkonsistenzproblems mehr möglich. Die supraleitende Sprungtemperatur geht in diesem Fall gegen Null, d. h. es ist keine Supraleitung mehr möglich. Dies wurde auch in [1] gefunden.

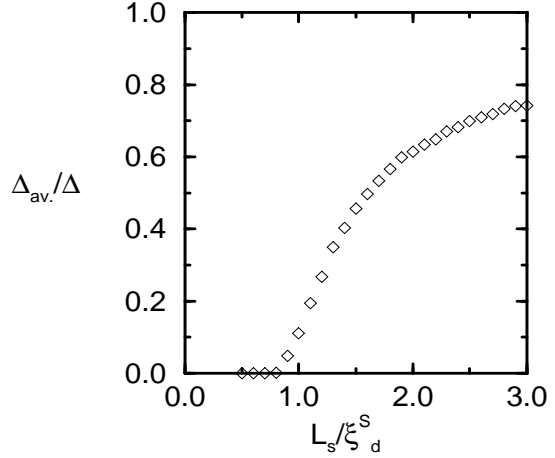


Abbildung 7.2: Paarpotential in einer dünnen supraleitenden Schichten in Abhängigkeit der Schichtdicke in Kontakt mit einem unendlich ausgedehnten Normalleiter.

7.3 Zustandsdichten

Aus den selbstkonsistenten Lösungen lassen sich gemäß

$$\frac{N(E, x)}{N(0)} = \text{Re } G_E^R(x),$$

die ortsabhängigen Zustandsdichten berechnen. Dabei ist $N(0)$ die Zustandsdichte an der Fermikante.

7.3.1 Zustandsdichten in unendlichen Systemen

Zunächst soll ein ausgedehntes System betrachtet werden. Dazu wählt man für die Abmessungen $L_s = L_n = 20\xi_d^S$. Im folgenden wurde in allen Fällen eine inelastische Streurrate $\Gamma_{in} = 10^{-3}\Delta$ im Supraleiter gewählt. Dies hat auf die Zustandsdichten in der Nähe der Grenzfläche praktisch keinen Einfluß, hat aber für die Numerik den Vorteil, daß die Singularitäten der Green-Funktionen von der reellen Achse in die komplexe Ebene verschoben werden.

In Abb. 7.3 sind die lokalen Zustandsdichten im Supraleiter in verschiedenen Entfernungen von der Grenzfläche dargestellt. Tief im Supraleiter hat die Zustandsdichte ihren "bulk"-Wert. Hier macht sich der Einfluß der inelastischen Streurrate am deutlichsten bemerkbar. Der Peak bei $E = \Delta$ ist ein bißchen verschmiert.

Bei einer Entfernung von $2\xi_d^S$ von der Grenzfläche ist der Peak bei $E = \Delta$ stark geschrumpft und es sind Zustände unterhalb von Δ vorhanden. Selbst bei $E = 0$ ist die Zustandsdichte schon endlich. Die Lage des Peaks ist außerdem zu einer niedrigeren Energie verschoben. Dies läßt sich durch den kleineren Wert des

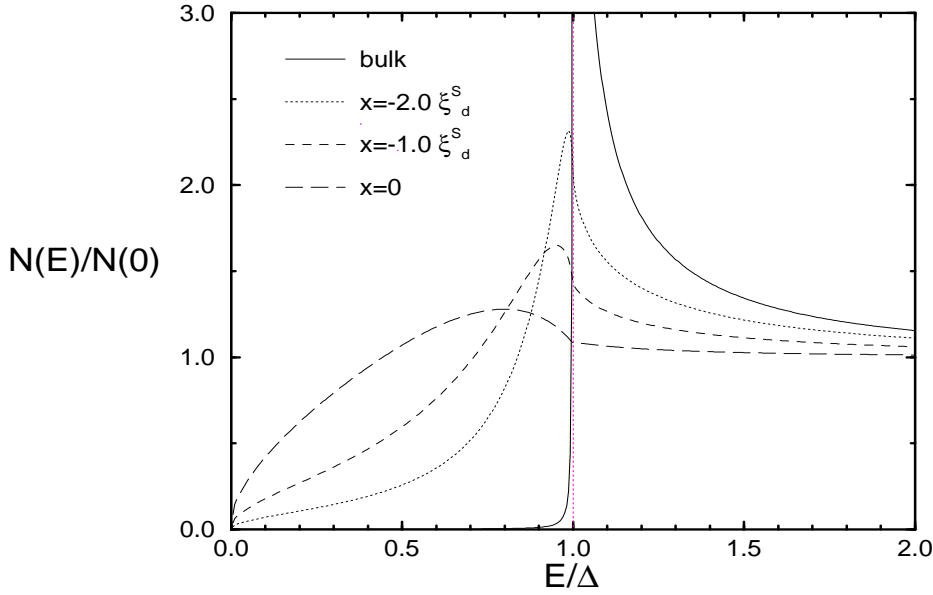


Abbildung 7.3: Zustandsdichten im unendlich ausgedehnten N-S-System auf der supraleitenden Seite der Grenzfläche für $\Gamma_{in} = 10^{-3} \Delta$ im Supraleiter und $\Gamma_s = 0$.

selbstkonsistenten Paarpotentials, der bei $x = 2\xi_d^S$ nur noch 90% des “bulk”-Wertes beträgt, erklären.

Dieser Trend setzt sich fort, wenn man sich der Grenzfläche weiter nähert. Die Höhe des Peaks nimmt weiter ab. Die Lage des Peaks verschiebt sich ebenso wie das selbstkonsistent Paarpotential zu immer kleineren Energien. Darüber hinaus sind immer mehr Zustände unterhalb des Gaps vorhanden. Dieses läßt sich verstehen, indem man Lösungen der Bogoliubov-de Gennes-Gleichungen für das gegebene System im reinen Fall betrachtet [27]. Diese zerfallen in einem Supraleiter exponentiell auf einer Länge, die proportional $(\Delta^2 - E^2)^{1/2}/\Delta$ ist. Überträgt man dies auf den schmutzigen Grenzfall, so ist diese Länge gegeben durch $\xi_d^S(\Delta^2 - E^2)^{1/2}/\Delta$. Im selbstkonsistenten Fall ist die Lage komplizierter, da das Paarpotential ortsabhängig ist, jedoch müßte qualitativ das gleiche gelten. Mit dieser Länge läßt sich die Energieabhängigkeit der Zustandsdichte unterhalb des Gaps verstehen, insbesondere, daß bei jeder Entfernung von der Grenzfläche mit zunehmender Energie auch mehr Zustände vorhanden sind.

In Abb. 7.4 und Abb. 7.5 sind die Zustandsdichten auf der normalleitenden Seite einmal mit $\Gamma_s = 0$ und einmal mit $\Gamma_s = 0.1\Delta$ dargestellt (jeweils nur auf der normalleitenden Seite). Die inelastische Streurrate ist in beiden Fällen gleich null.

Zunächst zum Fall ohne paarbrechende Streuung. Hier sieht man, daß der Peak weiterhin vorhanden ist, wenn auch weit weniger ausgeprägt als im Supraleiter. Auch der Trend, daß der Peak zu niedrigeren Energien wandert und immer breiter wird, ist weiterhin vorhanden. Die Zustandsdichte an der Fermi-Energie bleibt stark

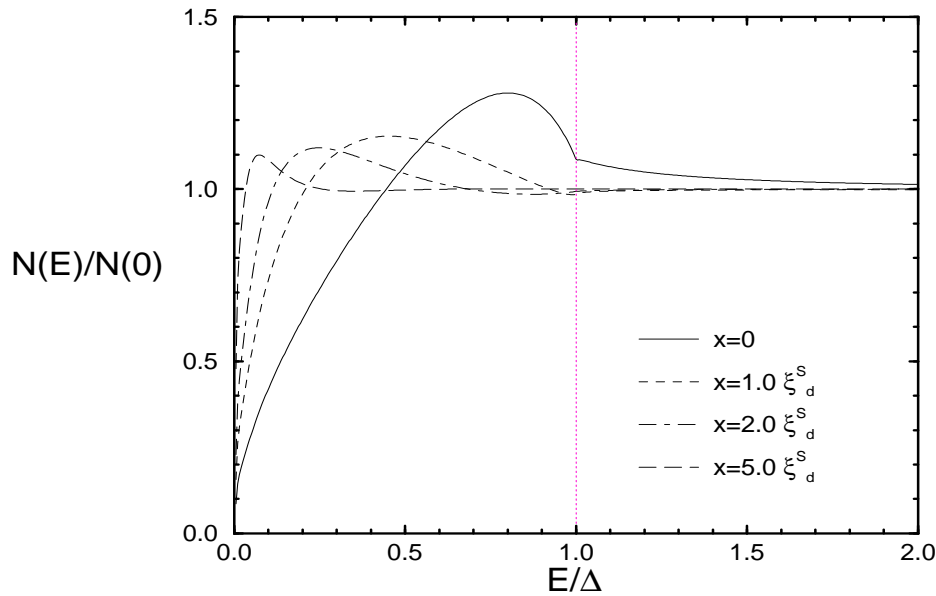


Abbildung 7.4: Zustandsdichten im N-S-System auf der normalleitenden Seite der Grenzfläche für $\Gamma_s = 0$ und eine inelastische Rate $\Gamma_{in} = 10^{-3} \Delta$ im Supraleiter.

unterdrückt. Die Ursache hierfür ist der fehlende kohärenzbrechende Streumechanismus. In Abb. 7.5 sieht man, daß ein inelastischer Streumechanismus dazu führt, daß die Zustandsdichte bei $E = 0$ wesentlich schneller ihren “bulk”-Wert erreicht.

Erstaunlich ist, daß in der Nähe der Grenzfläche bei $E = \Delta$ immer noch ein Knick in der Zustandsdichte vorhanden ist. Ein mögliche Ursache dafür ist, daß ein großer Unterschied zwischen Zuständen oberhalb des Gaps und unterhalb des Gaps besteht. Die Zustände oberhalb sind ausgedehnte Zustände, die den gesamten Raum ausfüllen können. Die Zustände unterhalb des Gaps sind hauptsächlich (wenn man das gesamte System betrachtet) im normalleitenden Teil konzentriert. Die Verhältnisse sind analog zum Fall eines diagonalen Potentials. Die gebundenen Zustände haben ein diskretes Spektrum, die freien ein kontinuierliches. Somit kann sich auch die Zustandsdichte oberhalb und unterhalb des Gaps unterschiedlich verhalten, was den Knick verursacht.

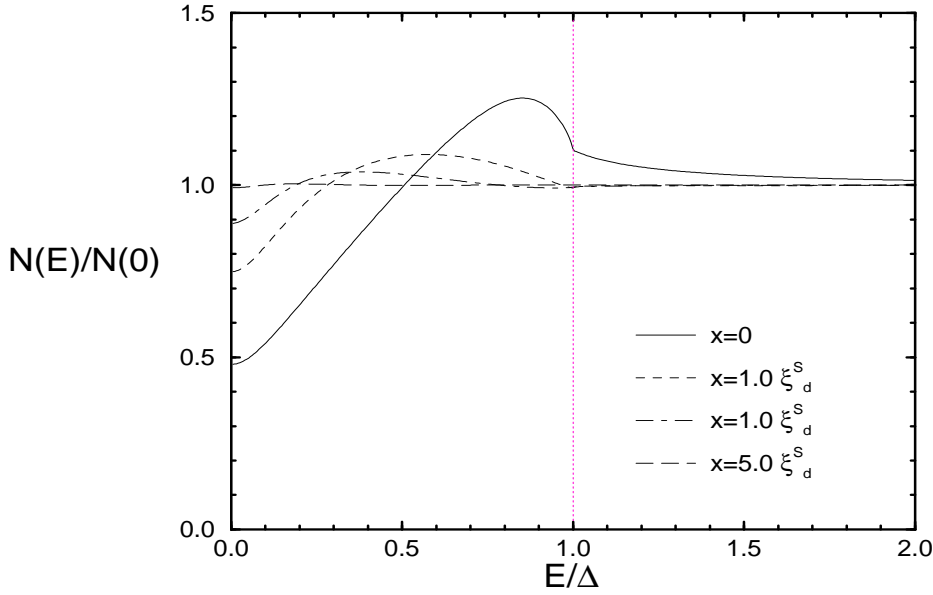


Abbildung 7.5: Zustandsdichten im N-S-System auf der normalleitenden Seite der Grenzfläche für eine Spinfliprate $\Gamma_s = 0.05\Delta$ im Normalleiter und eine inelastische Rate $\Gamma_{in} = 10^{-3}\Delta$ im Supraleiter.

7.3.2 Zustandsdichten in endlichen Systemen

In endlichen Systemen erwartet man im Vergleich zu unendlich ausgedehnten Systemen deutliche Unterschiede in der Zustandsdichte aufgrund der zusätzlichen Randbedingungen.

In Abb. 7.6 und Abb. 7.7 sind die lokalen Zustandsdichten für zwei dünne normalleitende Schichten mit den Dicken $L_n = 1\xi_d^S$ bzw. $L_n = 2\xi_d^S$ gezeigt. Beide haben sowohl im normalleitenden als auch im supraleitenden Bereich ein Gap, das nicht mit dem supraleitenden Gap zusammenfällt. Die Größe des Gaps ist umgekehrt proportional zur Schichtdicke.

Dieses etwas überraschende Ergebnis wurde auch schon von McMillan [28] mit einem Tunnel-Modell unter der Annahme eines hohen Reflexionskoeffizienten gefunden. Im reinen Fall ist die Energie des untersten Andreev-Levels gegeben durch $E = \pi v_{\perp}/4L_n = \pi/2t_n$, wobei t_n die Zeit ist, die ein Elektron braucht, um die N-Schicht zu durchqueren, also die Zeit zwischen zwei Andreev-Reflexionen. Da v_{\perp} auch Null sein kann gibt es kein Gap in der Zustandsdichte. Im schmutzigen Fall ist es jedoch so, daß aufgrund der diffusiven Bewegung alle Zustände nach einer bestimmten Zeit auf den Supraleiter treffen und Andreev-reflektiert werden. Es gibt also eine obere Schranke für t_n . Dies führt zusammen mit der Beziehung für die Andreev-Energien zu einem endlichen Gap in der Zustandsdichte.

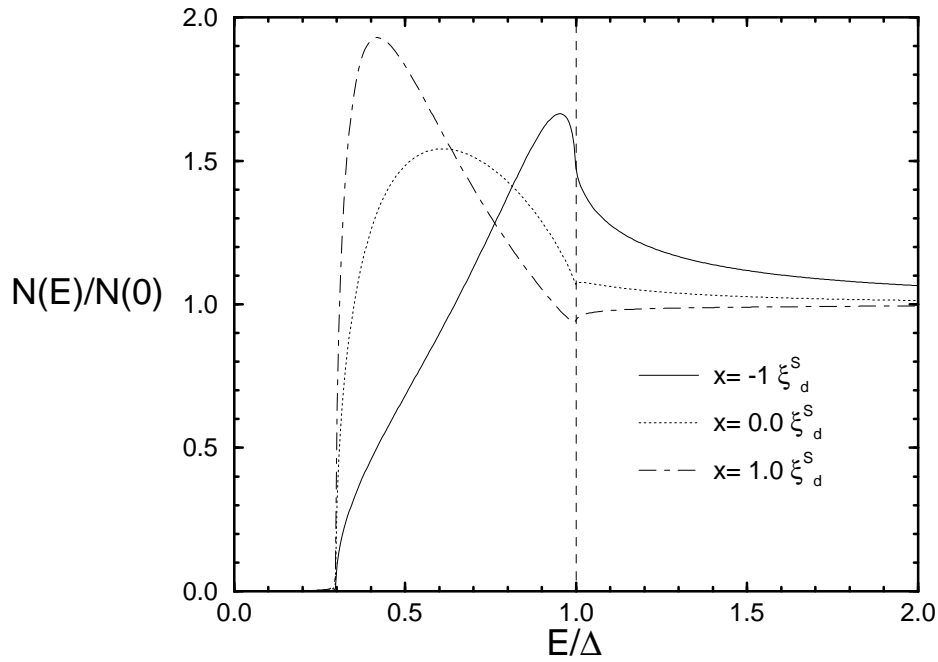


Abbildung 7.6: Zustandsdichten in einer dünnen normalleitenden Schicht der Dicke $L_n = \xi_d^S$ auf einem unendlichen Supraleiter an verschiedenen Stellen sowohl im Normalleiter als auch im Supraleiter. Die paarbrechende Streurrate ist Null.

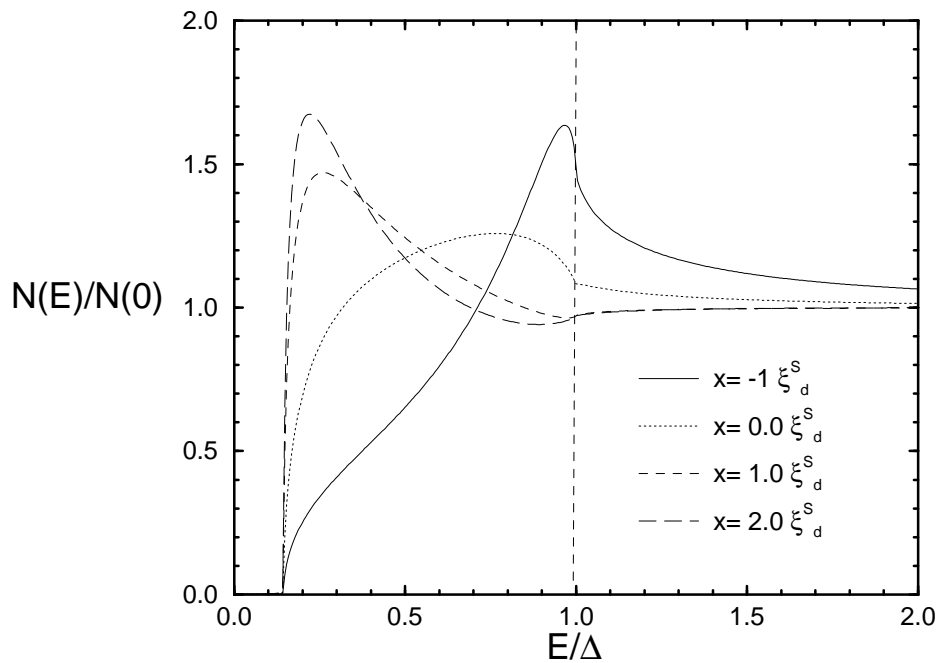


Abbildung 7.7: Zustandsdichten in einer dünnen normalleitenden Schicht der Dicke $L_n = 2\xi_d^S$ auf einem unendlichen Supraleiter an verschiedenen Stellen sowohl im Normalleiter als auch im Supraleiter. Die paarbrechende Streurrate ist Null.

Kapitel 8

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde der Proximity-Effekt in endlichen N-S-Geometrien mit der Methode der quasiklassischen Green-Funktionen untersucht. Im reinen Grenzfall $l_{el} \gg \xi_T$ wurden die Eilenberger-Gleichungen für eine zylindrische Geometrie analytisch gelöst und damit der induzierte Meißner-Effekt berechnet. Im schmutzigen Grenzfall $l_{el} \ll \xi_T$ wurden die Usadel-Gleichungen numerisch gelöst. Damit wurde einerseits der induzierte Meißner-Effekt bei endlichen Temperaturen und andererseits die ortsabhängige Zustandsdichte bei $T = 0$ berechnet.

Der Meißner-Effekt unterscheidet sich im reinen und im schmutzigen Fall sehr stark. Im reinen Fall wurde ein nichtlokaler Strom-Vektorpotential-Zusammenhang von der Form gefunden, daß die Stromdichte in der N-Schicht von dem Integral des Vektorpotentials über die gesamte N-Schicht abhängt. Dies wurde mit einer Verschiebung der Andreev-Levels erklärt. Eine Konsequenz davon ist, daß die Stromdichte in der gesamten Normalleiterschicht für $R \gg d$ konstant ist. Dies kann zu einer Vorzeichenumkehr des magnetischen Feldes in einem Teil der N-Schicht führen. Der Betrag des Feldes an der N-S-Grenzfläche kann halb so groß wie das äußere Feld bei entgegengesetztem Vorzeichen werden. In einer zylindrischen Geometrie hängt der Strom vom Ort ab. Auch hier ist das Phänomen "overscreening" gefunden worden. Der Betrag des "overscreen"-Feldes an der N-S-Grenzfläche kann sogar größer als im ebenen Fall werden.

Die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität der Normalleiterschicht ist exponentiell. Bei tiefen Temperaturen findet aufgrund des nichtlokalen Strom-Vektorpotential-Zusammenhangs keine vollständige Feldverdrängung statt. Die Suszeptibilität der Normalleiterschicht unterschreitet $3/4$ der vollständigen Feldverdrängung nicht. Dieser Sättigungswert ist für $R \gg d$ unabhängig von der Schichtdicke. In höheren Magnetfeldern wurde eine sprunghafte Änderung der Suszeptibilität bei tiefen Temperaturen gefunden. Bei einer bestimmten Feldstärke springt die Suszeptibilität mit zunehmendem Feld von ihrem Sättigungswert auf Null zurück. An diesem Übergang müßte ein hysteretisches Verhalten zu beobachten sein.

Experimente, die an sehr reinen Proben durchgeführt wurden, können nicht durch die Theorie im reinen Grenzfall erklärt werden. Die Ursache dafür kann sein, daß in den Experimenten ein hoher Reflexionskoeffizient vorliegt, der in der

Theorie nicht berücksichtigt wurde, oder eine geringe aber endliche Konzentration an Verunreinigungen vorhanden ist, die die Gültigkeit des reinen Grenzfalles bei sehr tiefen Temperaturen in Frage stellt. Auf der anderen Seite ist die sprunghafte Änderung der Suszeptibilität bei höheren Feldstärken gemessen worden, wie sie im reinen Grenzfall vorhergesagt wird.

Im schmutzigen Grenzfall ist die Feldverdrängung von ganz anderer Natur. Der Strom-Vektorpotential-Zusammenhang ist lokal mit einer ortsabhängigen Eindringtiefe $\lambda(r)$. Das Feld dringt ein, bis die lokale Eindringtiefe so klein wird, daß eine exponentielle Abschirmung erfolgt. Die Feldverdrängung erreicht bei tiefen Temperaturen somit fast ihren Maximalwert $-1/4\pi$, bis auf den kleinen Teil, der an der N-Vakuum-Grenzfläche eindringt. Bei höheren Temperaturen geht die Suszeptibilität langsam auf 0 zurück. Die Temperaturabhängigkeit im mittleren Temperaturbereich $D/d^2 \ll T \ll T_c$ ist gegeben durch $\chi \propto [(T/T_c)^{-1/2} - \text{const.}]$. Dieses Verhalten wurde in sehr schmutzigen Proben gemessen.

In höheren Feldern zeigt die Suszeptibilität auch in diesem Fall ein unstetiges Verhalten. Der Sprung ist jedoch nicht so groß wie im reinen Fall. Der gemessene Sättigungswert bei tiefen Temperaturen stimmt mit den im schmutzigen Grenzfall berechneten überein, wie auch die Magnetfeldabhängigkeit.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Theorie im schmutzigen Grenzfall gut mit den experimentellen Daten für sehr schmutzige Proben übereinstimmt. Die Theorie im reinen Grenzfall konnte bisher nicht experimentell bestätigt werden. Dazu müßten noch reinere Proben bzw. dünnere Schichten benutzt werden. Um die jetzigen Ergebnisse quantitativ theoretisch vorherzusagen, müßte der Bereich zwischen den beiden Grenzfällen ergründet werden und ein endlicher Reflexionskoeffizient berücksichtigt werden.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wurde das selbstkonsistente Paarpotential bei $T = 0$ und die ortsabhängige Zustandsdichte in N-S-Systemen berechnet. Es wurde in unendlich ausgedehnten Systemen eine Unterdrückung des Paarpotentials an der Grenzfläche auf die Hälfte des "bulk"-Wertes gefunden. Unterhalb einer kritischen Supraleiter-Schichtdicke von $\approx 0.95(D/2\Delta)^{1/2}$ war in Systemen mit einem unendlich dicken Normalleiter keine Lösung des Selbstkonsistenzproblems und damit keine Supraleitung mehr möglich.

Die Zustandsdichte im Proximity-System zeigt einige interessante Eigenschaften. Auf der supraleitenden Seite wird der Peak bei $E = \Delta$ stark unterdrückt, und es sind viele Zustände mit Energien $E < \Delta$ vorhanden. Auf der normalleitenden Seite bleibt eine Peak-artige Struktur bis zu Entfernungen von $5(D/2\Delta)^{1/2}$ vorhanden. Die Zustandsdichte bei kleinen Energien im Normalleiter ist in Abwesenheit von paarbrechender Streuung stark unterdrückt. Paramagnetische Störstellen auf der normalleitenden Seite schwächen den Proximity-Effekt ab. In dünnen normalleitenden Schichten findet sich in der Zustandsdichte ein Minigap, das mit zunehmender Schichtdicke immer kleiner wird.

Anhang A

Berechnung der Meißner-Stromdichte im reinen Grenzfall

A.1 Lösung der Eilenberger-Gleichungen

Hier soll die Eilenberger-Gleichung

$$- \mathbf{v}_F \boldsymbol{\partial} \hat{g}_\omega(r, \mathbf{v}_F) = [(\omega + ie \mathbf{v}_F \mathbf{A}(r)) \tau_3 + \hat{\Delta}(r), \hat{g}_\omega(r, \mathbf{v}_F)] \quad (\text{A.1})$$

für die zylindrische Geometrie, die in Kapitel 2 angegeben ist, gelöst werden. Dabei wird so vorgegangen, daß zunächst die Gleichung für den ebenen Fall gelöst wird. Dieses Ergebnis kann dann leicht auf den zylindrischen Fall verallgemeinert werden.

Die Randbedingungen sind

$$\hat{g}_\omega^s(R - 0, \mathbf{v}_F) = \hat{g}_\omega^n(R + 0, \mathbf{v}_F) \quad (\text{A.2})$$

an der N-S-Grenzfläche (keine Reflexion),

$$\hat{g}_\omega^n(R + d, \mathbf{v}_\perp, \mathbf{v}_\parallel) = \hat{g}_\omega^n(R + d, -\mathbf{v}_\perp, \mathbf{v}_\parallel) \quad (\text{A.3})$$

an der Grenzfläche zum Vakuum (spiegelnde Reflexion) und

$$\hat{g} \rightarrow \frac{1}{\Omega} \begin{pmatrix} \omega & \Delta \\ \Delta & -\omega \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

mit $\Omega = \sqrt{\Delta^2 + \omega^2}$ tief im Supraleiter.

Im ebenen Fall ist die Gleichung effektiv 1-dimensional

$$-v_{Fx} \partial_x \hat{g}(x, v_{Fx}, v_{Fy}) = [(\omega + ie v_y A(x)) \tau_3 + \hat{\Delta}(x), \hat{g}(x, v_{Fx}, v_{Fy})]. \quad (\text{A.5})$$

Die allgemeine Lösung ist eine Superposition der homogenen Lösung \hat{g}_h und einer ansteigenden und einer abfallenden Lösung \hat{g}_+ bzw. \hat{g}_- . Im Normalleiter ($R \leq x \leq R + d$) hat sie die Form

$$\hat{g}(x)^n = A_0 \hat{g}_h^n + A_+ \hat{g}_+^n e^{\chi(x-R)} + A_- \hat{g}_-^n e^{-\chi(x-R)},$$

wobei

$$\chi(x) = \frac{2\omega}{|v_{Fx}|} x + 2ie \frac{v_{Fy}}{|v_{Fx}|} \int_0^x A(R+x') dx'$$

und

$$\begin{aligned} \hat{g}_h^n &= \tau_3 \\ \hat{g}_+^n &= \frac{1}{2} (\tau_1 - i \operatorname{sign}(v_{Fx}) \tau_2) \\ \hat{g}_-^n &= \frac{1}{2} (\tau_1 + i \operatorname{sign}(v_{Fx}) \tau_2) \end{aligned}$$

ist. Im Supraleiter dagegen läßt sich die allgemeine Lösung schreiben als

$$\hat{g}(r)^s = B_0 \hat{g}_h^s + B_+ \hat{g}_+^s e^{\frac{2\Omega(x-R)}{|v_{Fx}|}} + B_- \hat{g}_-^s e^{-\frac{2\Omega(x-R)}{|v_{Fx}|}}, \quad (\text{A.6})$$

wobei

$$\begin{aligned} \hat{g}_h^s &= \frac{1}{\Omega} (\omega \tau_3 + \Delta \tau_1) \\ \hat{g}_+^s &= \frac{1}{2\Omega} (\Delta \tau_3 - \omega \tau_1 + i \Omega \operatorname{sign}(v_{Fx}) \tau_2) \\ \hat{g}_-^s &= \frac{1}{2\Omega} (\Delta \tau_3 - \omega \tau_1 - i \Omega \operatorname{sign}(v_{Fx}) \tau_2) \end{aligned}$$

ist. Hierbei wurde im Supraleiter das Magnetfeld vernachlässigt, da die magnetische Eindringtiefe viel kleiner als die Kohärenzlänge ist.

Die Koeffizienten $A_0, B_0, A_{+/-}$ und $B_{+/-}$ hängen nicht mehr von x und vom Vorzeichen von v_{Fx} ab. Sie erfüllen die Normierungsbedingungen

$$A_0^2 + A_+ A_- = 1 \quad \text{und} \quad B_0^2 + B_+ B_- = 1.$$

Die Koeffizienten ergeben sich nun aus den Randbedingungen. Mit den Randbedingungen tief im Supraleiter findet man

$$B_- = 0 \quad \text{und} \quad B_0 = 1,$$

während aus den Randbedingungen bei $x = R + d$ im Normalleiter

$$A_+ e^{\chi(d)} = A_- e^{-\chi(d)} \equiv A$$

folgt. Die letzten beiden freien Koeffizienten sind aus der Anschlußbedingung bei $r = R$

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\omega}{\Omega} + B_+ \frac{\Delta}{2\Omega} \\ A \cosh(\chi(d)) &= \frac{\Delta}{\Omega} - B_+ \frac{\omega}{2\Omega} \end{aligned}$$

und der Normierungsbedingung im Normalleiter zu bestimmen. Die vollständigen Lösungen in Normal- und Supraleiter lauten dann

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\Omega + \omega \coth(\chi(d))}{\omega + \Omega \coth(\chi(d))} \\ A &= \frac{\Delta}{\omega \sinh(\chi(d)) + \Omega \cosh(\chi(d))} \\ B_+ &= \frac{2\Delta}{\omega + \Omega \coth(\chi(d))} \end{aligned}$$

A.2 Meißner-Stromdichte im zylindrischen Fall

Zur Berechnung des Meißner-Stromes in der Normalleiterschicht benötigen wir die τ_3 -Komponente der Green-Funktion, die hier durch A_0 gegeben ist. Diese ist von den Koordinaten unabhängig und läßt sich leicht auf den zylindrischen Fall verallgemeinern. Schreibt man

$$\chi(d) = 2 \int_R^{R+d} \left(\frac{\omega}{|v_{Fx}|} + ie \frac{v_{Fy}}{|v_{Fx}|} A(x) \right) dx, \quad (\text{A.7})$$

so sieht man, daß dieses in der von der Geometrie unabhängigen Weise

$$\chi(L) = \frac{\omega L_{\mathbf{L}}}{v_F} + ie \int_{\mathbf{L}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{A.8})$$

für eine bestimmte Trajektorie L geschrieben werden kann. Hierbei bezeichnet $L_{\mathbf{L}}$ die Länge der betrachteten Trajektorie und das Integral ist das Linienintegral entlang derselben.

Für die φ -Komponente der Stromdichte ergibt sich dann

$$j_n(r) = -ieN(0)T \sum_{\omega>0} \langle v_{F\varphi} A_0 \rangle(r). \quad (\text{A.9})$$

Die Parametrisierung der Mittelung über die Fermifläche geht auf eine Idee von Nazarov zurück [20]. Sie wird so gewählt, daß die Bahnen, die den Supraleiter nicht treffen und somit nicht zum Strom beitragen, leicht ausgeschlossen werden können. Anstatt der üblichen Winkelmittelung

$$\int \frac{d\Omega_{v_F}}{4\pi} \dots = \int_{-1}^1 \frac{d \cos \theta}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \dots \quad (\text{A.10})$$

wählt man mit $\rho = r \sin \phi$ die ortsabhängige Parametrisierung

$$\int_{-r}^r \frac{d\rho \rho}{r\sqrt{r^2 - \rho^2}} \int_{-1}^1 \frac{d \cos \theta}{4\pi} \dots, \quad (\text{A.11})$$

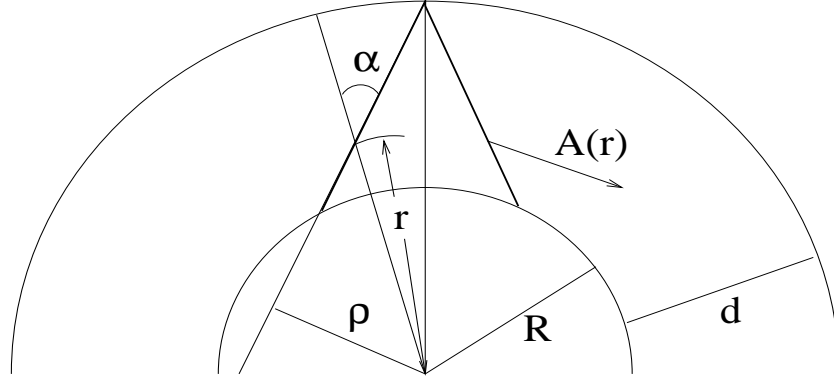


Abbildung A.1: Parametrisierung der Mittelung über die Fermifläche nach Nazarov [20]

wobei die Bedeutung von ρ in Abb. A.1 deutlich gemacht ist. Daran sieht man, daß die Trajektorien, die zum Strom beitragen durch $|\rho| < R$ gekennzeichnet sind. Die Länge einer solchen Trajektorie ist dann

$$L(\rho, \theta) = 2 \frac{\sqrt{(R+d)^2 - \rho^2} - \sqrt{R^2 - \rho^2}}{|\sin \theta|}. \quad (\text{A.12})$$

Das Linienintegral über das Vektorpotential ist in dieser Parametrisierung

$$\int \mathbf{A}(r) d\mathbf{x} = 2 \int_R^{R+d} dr' A(r') \frac{\rho}{\sqrt{r'^2 - \rho^2}} \text{sign} \theta. \quad (\text{A.13})$$

Setzt man alles in die Stromdichte A.9 ein, so ergibt sich

$$j_n(r) = 4eN(0)v_F T \sum_{\omega > 0} \int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\rho \sin^2 \theta}{2\pi r \sqrt{r^2 - \rho^2}} \quad (\text{A.14})$$

$$\times \frac{\Delta^2 \sin \phi (\cosh \Phi + \cos \phi)}{(\omega \sinh \Phi + \Omega (\cosh \Phi + \cos \phi))^2 + \omega^2 \sin^2 \phi}$$

$$\Phi = \frac{2\omega L(\rho, \theta)}{v_s u b F} \quad \phi = 4e \int_R^{R+d} dr' A(r') \frac{\rho}{\sqrt{r'^2 - \rho^2}}$$

Im Grenzfall kleiner Magnetfelder ist die Stromdichte durch den linearisierten Ausdruck

$$j_n(r) \approx 16e^2 N(0) v_F T \sum_{\omega > 0} \int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{2\pi r \sqrt{r^2 - \rho^2}} \quad (\text{A.15})$$

$$\times \frac{\Delta^2 (\cosh \Phi + 1)}{(\omega \sinh \Phi + \Omega (\cosh \Phi + 1))^2} \int_R^{R+d} dr' \frac{A(r')}{\sqrt{r'^2 - \rho^2}}$$

gegeben

Anhang B

Numerik

B.1 Relaxationsverfahren

Die Usadel-Gleichungen in dimensionslosen Einheiten für eine Matsubara-Frequenz $\omega_\mu = \pi T/T_c (2\mu + 1)$

$$\frac{d^2 \alpha_\mu(x)}{dx^2} = \frac{T}{T_c} (2\mu + 1) \sin(\alpha_\mu(x)) + A^2(x) \sin(2\alpha_\mu(x)) \quad (\text{B.1})$$

mit den Randbedingungen

$$\frac{d\alpha_\mu(d)}{dx} = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_\mu(0) = \arcsin\left(\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + \omega_\mu^2}}\right) \quad (\text{B.2})$$

stellen ein nichtlineares Randwertproblem 2. Ordnung dar. Die Lösung kann also nicht durch eine einfache numerische Integration gewonnen werden, bei der aus der DGL ein Entwicklungsoperator gebildet und die DGL von einem Rand ausgehend integriert wird. Hierbei müßten die beiden Randbedingungen an der *gleichen* Seite bekannt sein.

Eine weitere Methode wäre das sogenannte “Schießen”, bei dem die fehlende Randbedingung an einer Seite geraten wird, und dann von dieser Seite ausgehend mit dem Entwicklungsoperator integriert wird. Da die Usadel-Gleichungen nichtlinear sind, kann diese Methode hier nicht angewendet werden. Die Lösungen sehen schon bei geringsten Abweichungen von der wahren Randbedingung vollkommen anders aus.

Aus diesen Gründen wurde das sogenannte Relaxationsverfahren aus “Numerical Recipes in C” (Kapitel 17.3) [21] verwendet. Das Prinzip besteht darin aus der Differentialgleichung mit Randbedingungen eine *Differenzgleichung* zu machen und das entstehende Matrixproblem mit einem geeigneten Verfahren iterativ zu lösen. Dieses Verfahren wird durch die Routinen aus [21] geliefert, die dort beschrieben sind und hier nicht weiter ausgebreitet werden sollen. Der Benutzer muß die Differenzgleichung (etwas modifiziert) und eine möglichst gute Schätzung der Lösung, die die korrekten Randbedingungen erfüllt und sonst beliebig sein kann, vorgeben.

Die Differentialgleichung 2. Ordnung für einen bestimmten Matsubarasummanden wird zunächst in ein Dgl-System 1. Ordnung umgeschrieben für zwei Funktionen $\alpha_1 = \alpha$ und $\alpha_2 = d\alpha/dx$. Dieses lautet

$$\frac{d\alpha_1(x)}{dx} = \alpha_2(x) \quad \frac{d\alpha_2(x)}{dx} = \frac{T}{T_c}(2\mu + 1) \sin(\alpha_1(x)) + A^2(x) \sin(2\alpha_1(x)), \quad (\text{B.3})$$

wobei der Matsubaraindex unterdrückt wurde. Dieses System wird schließlich in Differenzgleichungen auf einem endlichen Gitter mit N Punkten mit Abständen Δx bei x_k transformiert

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1(x_k) - \alpha_1(x_{k-1})}{\Delta x} &= \frac{\alpha_2(x_k) + \alpha_2(x_{k-1})}{2} \\ \frac{\alpha_2(x_k) - \alpha_2(x_{k-1})}{\Delta x} &= \frac{T}{T_c}(2\mu + 1) \sin\left(\frac{\alpha_1(x_k) + \alpha_1(x_{k-1})}{2}\right) \\ &\quad + \left(\frac{A(x_k) + A(x_{k-1})}{2}\right)^2 \sin(\alpha_1(x_k) + \alpha_1(x_{k-1})) \end{aligned}$$

für $k = 1 \cdots N - 1$ und an den Rändern

$$\alpha_1(x_0) = \arcsin\left(\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + \omega_\mu^2}}\right) \quad \alpha_2(x_N) = 0.$$

Als Anfangsschätzung wird die Lösung der linearisierten Gleichung ohne Magnetfeld vorgegeben. Sie lautet für einem bestimmten Matsubaraindex μ mit $\kappa_\mu = (\omega_\mu/\pi)^{1/2}$

$$\begin{aligned} \alpha_1(x_k) &= \arcsin\left(\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + \omega_\mu^2}}\right) \frac{\cosh(\kappa_\mu(N - k) \Delta x)}{\cosh(\kappa_\mu N \Delta x)} \\ \alpha_2(x_k) &= \arcsin\left(\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + \omega_\mu^2}}\right) \frac{-\kappa_\mu \sinh(\kappa_\mu(N - k) \Delta x)}{\cosh(\kappa_\mu N \Delta x)}. \end{aligned}$$

Das Relaxationsverfahren arbeitet nach dem Prinzip, daß von der Anfangsschätzung ausgehend diese schrittweise verbessert wird. Die Verbesserung wird mit einer Matrix berechnet, die aus der Differenzgleichung gewonnen wird. Als Maß für die Konvergenz der Iteration wird die durchschnittliche Korrektur *eps* bei einem Iterationszyklus zu allen Variablen an allen Gitterpunkten benutzt. Maximal werden *Itmax* Iterationen ausgeführt.

Bei der Anwendung auf den Meißner-Effekt war die interessante Größe die inverse Eindringtiefe

$$\frac{1}{\lambda^2(x_k)} = K \frac{T}{T_c} \sum_{\mu=0}^{\mu_c} \sin^2(\alpha_{1\mu}(x_k)).$$

Typische verwendete Werte waren

$\mu_c = T_c/T$	entspricht einer "cutoff"-Energie $\omega_c \approx 6T_c$
$Itmax = 100$	Maximalzahl der Iterationen
$eps = 10^{-3}$	Abbruchkriterium für Relaxationsverfahren
$N = 200$	Zahl der Gitterpunkte

Damit wird bei hinreichend guter Anfangsschätzung eine Konvergenz erreicht. Bei einer Temperatur $T = 0.01T_c$ mit 200 Gitterpunkten benötigt der Algorithmus einige Sekunden auf einer Workstation.

B.2 Iteration des Selbstkonsistenzproblems

Das Gleichungssystem aus Usadel-Gleichungen und Maxwell-Gleichung besitzt in bestimmten Parameterbereichen keine eindeutige Lösung. Man könnte das Problem iterativ angehen, d.h., man löst die Usadel-Gleichungen zunächst für ein bestimmten Verlauf des Magnetfeldes. Mit dieser Lösung bestimmt man $1/\lambda^2(x)$ und damit erneut das Magnetfeld. Dann beginnt man von vorne. Leider ist es nicht vorhersagbar, welche Lösung dieses iterative Verfahren findet, wenn es überhaupt konvergiert.

Aus diesem Grund wird ein anderes Lösungsverfahren verwendet, das mit veränderlichem Magnetfeld arbeitet. Dabei beginnt man bei einem bestimmten Wert des Magnetfeldes H_1 , bei dem das System eine eindeutige Lösung besitzt. Dieser Startwert H_1 kann entweder oberhalb oder unterhalb vom Instabilitätsbereich liegen. Nun löst man zunächst die Maxwell-Gleichung für diesen Wert und erhält $B(x)$. Liegt H_1 unterhalb des Instabilitätsbereiches, so wird die geschätzte Eindringtiefe ohne Magnetfeld eingesetzt, liegt H_1 oberhalb, wird der Strom gleich Null gesetzt. Mit diesem Magnetfeld löst man die Usadel-Gleichungen und berechnet daraus die Eindringtiefe $\lambda(x)$. Damit löst man erneut die Maxwell-Gleichung und erhält ein neues Magnetfeld $B(x)$, womit man erneut die Usadel-Gleichungen löst.

Bei dieser Iteration wird als Konvergenzkriterium die Änderung des Magnetfeldes pro Iterationszyklus $\Delta B(x)$ benutzt. Das gewählte Konvergenzkriterium ist

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \frac{\Delta B(x_n)}{B(x_n)} < Konv$$

wobei für $Konv$ typischerweise $\sim 10^{-2} - 10^{-3}$ gewählt wurde. Damit wird beim ersten Magnetfeld eine Konvergenz nach wenigen Zyklen erreicht (typischerweise 3 – 4).

Ist nun die Konvergenz erreicht, so wird das Magnetfeld um einen kleinen Betrag dH , der negativ oder positiv sein kann, verändert und die Maxwell-Gleichung erneut gelöst, jedoch mit der Eindringtiefe, die zuletzt berechnet wurde. Damit beginnt der Iterationszyklus von neuem. Jetzt wird die Konvergenz jedoch schon innerhalb von 1 – 2 Zyklen erreicht.

Auf diese Weise, die in Abb. B.1 schematisch dargestellt ist, kann man den instabilen Bereich auf einem Ast durchlaufen, ohne Konvergenzproblem zu bekommen. Gelangt man schließlich an die Grenze des Instabilitätsbereiches, so wird die Iteration auf den anderen Ast gezwungen. Hierbei kann es passieren, daß bis zu ≈ 50 Zyklen notwendig sind, bis die Konvergenz erreicht ist.

Mit diesem Verfahren kann die Suszeptibilität für alle Magnetfelder bestimmt werden, indem man einmal mit einem kleinen Magnetfeld startet und dann schrittweise erhöht oder andermal mit einem großen Feld startet und dann schrittweise erniedrigt.

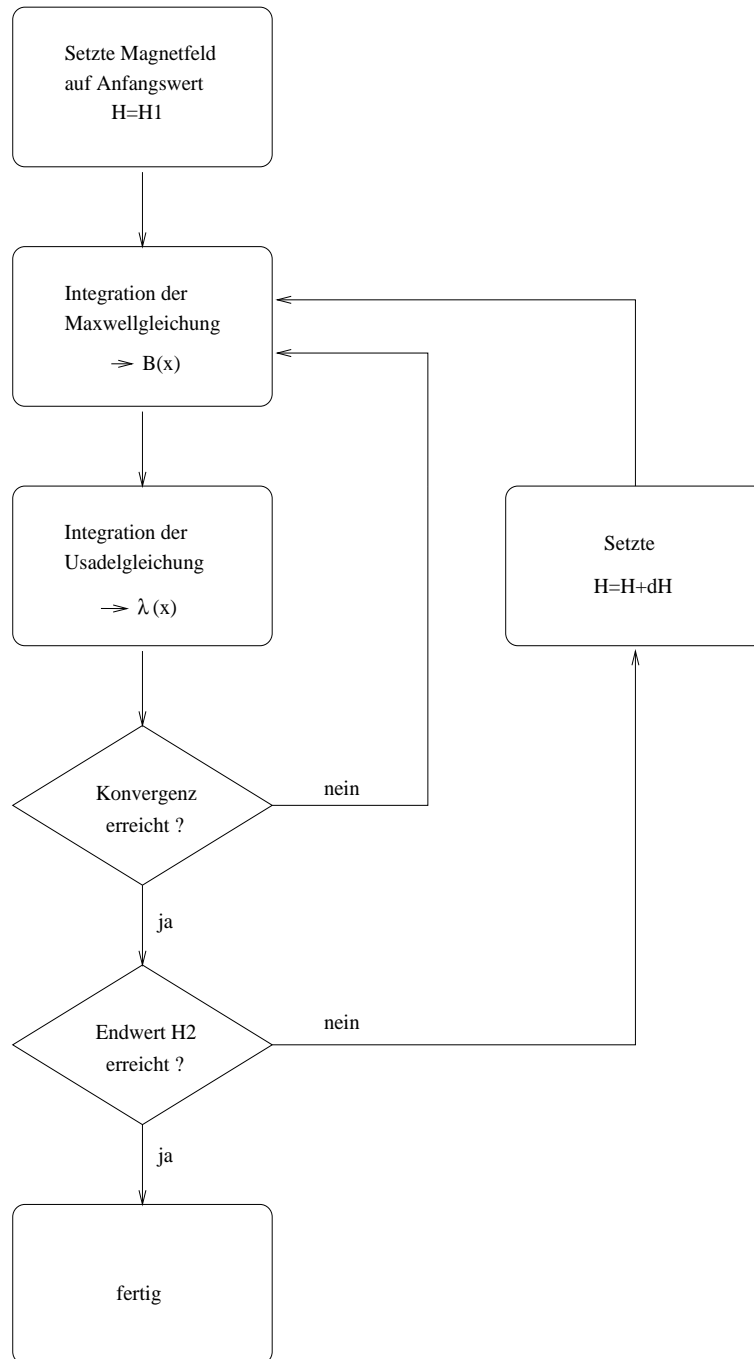


Abbildung B.1: Flußdiagramm des Lösungsverfahrens im schmutzigen Grenzfall in starken Magnetfeldern

B.3 Berechnung des selbstkonsistenten Paarpotentials

Für numerische Zwecke ist die Realzeit-Usadel-Gleichung (7.1) für $F_E^R(x)$ schlecht geeignet, da sie komplexe Wurzeln enthält. Die damit verbundenen numerischen Schwierigkeiten kann man umgehen, indem man $G_E^R(x) = \cos(\alpha)$ und $F_E^R(x) = \sin(\alpha)$ setzt. Dann geht (7.1) über in

$$\frac{1}{2}D \frac{d^2 \alpha}{dx^2} = (-iE + \Gamma_{in}) \sin(\alpha) - \Delta \cos(\alpha) + \Gamma_s \sin(2\alpha) \quad (\text{B.4})$$

Setzt man nun $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, so ergeben sich als Real- und Imaginärteil von (B.4) zwei gekoppelte Differentialgleichungen.

Die Selbstkonsistenzgleichung ist dann

$$\Delta(x) = \Theta(-x) \frac{\int_0^{\omega_c} dE \cos(\alpha_1(E, x)) \sinh(\alpha_2(E, x))}{\text{arcosh}\left(\frac{\omega_c}{\Delta}\right)}. \quad (\text{B.5})$$

Die Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \alpha_{1,2}(E, x)|_{x=-L_s} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \alpha_{1,2}(E, x)|_{x=L_n} &= 0 \\ \alpha_{1,2}(E, 0+) &= \alpha_{1,2}(E, 0-). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Damit ist das Problem vollständig beschrieben und kann numerisch gelöst werden.

Die Integration des Differentialgleichungssystems (B.4) erfolgt mit dem in Anhang B.1 beschriebenen Relaxationsverfahren. Das Selbstkonsistenzproblem wird iterativ gelöst. Man beginnt mit der Vorgabe eines stufenförmigen Paarpotentials und berechnet die Lösung von (B.4). Daraus bestimmt man sich mit (B.5) ein neues Paarpotential und löst damit die Gleichung erneut.

Als Konvergenzkriterium wird verlangt, daß die durchschnittliche relative Korrektur zum Paarpotential pro Iterationszyklus einen bestimmten Wert unterschreitet. Dafür wurde meistens ein Wert um 0.005 als ausreichend angesehen. Die benötigte Zahl von Iterationen ist stark von L_s abhängig. In Abb. B.2 ist der Verlauf einer typischen Iteration des selbstkonsistenten Paarpotentials für einen relativ dünnen Supraleiter gezeigt. Die Parameter sind $L_s = 2\xi_d^S$ und $L_n = 10\xi_d^S$, wobei als Einheit der Länge die supraleitende Kohärenzlänge im schmutzigen Grenzfall $\xi_d^S = (D/2\Delta)^{1/2}$ dient.

Dabei zeigt sich, daß die größte Korrektur schon bei der 1. Iteration erfolgt. Insbesondere ist die Ortsabhängigkeit schon sehr ähnlich zur selbstkonsistenten Lösung. Der Absolutbetrag wird in den weiteren Lösungen immer weiter abgesenkt. Bei 10 Iterationen schließlich ist die Abweichung von der selbstkonsistenten Lösung nur noch sehr gering, die relative Korrektur beträgt noch $\approx 0.5\%$ pro Iterationszyklus. In den nächsten 10 Iterationen wird diese noch kleiner. Nach 20 Iterationen ist die relative Korrektur pro Iterationszyklus nur noch $\approx 0.1\%$.

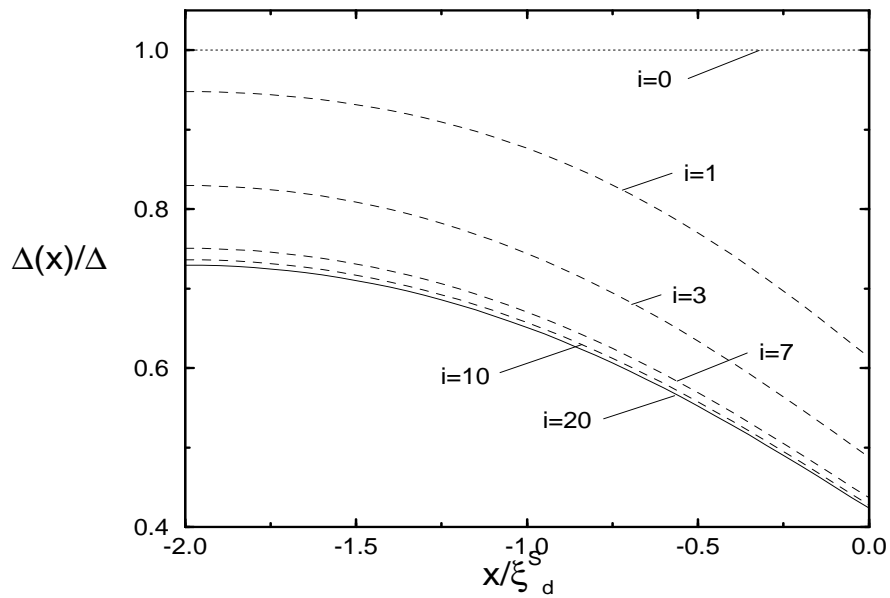


Abbildung B.2: Verlauf einer selbstkonsistenten Berechnung des Paarpotentials am Beispiel einer supraleitenden Schicht mit $L_s = 2\xi_d^S$ auf einem dicken Normalleiter mit $L_n = 10\xi_d^S$. Die Zahl i gibt die Zahl der durchgeführten Iterationen an. Nach 20 Iterationen betrug die durchschnittliche Korrektur zum Paarpotential $\approx 10^{-3}$. Das Konvergenzkriterium 0.005 wurde nach 10 Iterationen erreicht

Literaturverzeichnis

- [1] P. G. de Gennes, Rev. Mod. Phys. **36**, 225 (1964).
- [2] Orsay Group on Superconductivity, in: Quantum Fluids, ed. D. Brewer (North-Holland, Amsterdam, 1966).
- [3] G. Eilenberger, Z. Phys. **214**, 195 (1968).
- [4] A. I. Larkin und Yu. N. Ovchinnikov, Sov.Phys. JETP **26**, 1200 (1968).
- [5] Y. Oda und H. Nagano, Solid State Commun. **35**, 631 (1980).
- [6] Th. Bergmann, K. H. Kuhl, B. Schröder, M. Jutzler, und F. Pobell
J. Low. Temp. Phys. **66**, 209 (1987).
- [7] A. C. Mota, P. Visani, und A. Pollini, J. Low Temp. Phys **76**, 465 (1989).
- [8] P. Visani, A. C. Mota und A. Pollini, Phys. Rev. Lett. **65**, 1514 (1990).
- [9] A. C. Mota, P. Visani, A. Pollini, und K. Aupke, Physica B **197**, 95 (1994).
- [10] D. Esteve und H. Pothier, private Mitteilung.
- [11] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov und I. E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Dover, 1963).
- [12] K. D. Usadel, Phys. Rev. Lett. **25**, 507 (1970).
- [13] A. D. Zaikin, Solid State Commun. **41**, 533 (1982).
- [14] M. Ashida, S. Aoyama, J. Hara und K. Nagai, Physical Review B **40**, 8673 (1989).
- [15] S. Higashitani and K. Nagai, J. Phys. Soc. Jpn **64**, 549 (1995).
- [16] O. Narikiyo and H. Fukuyama, J. Phys. Soc. Jpn **58**, 4557 (1989).
- [17] G. Rickayzen, *Green's Functions and Condensed Matter*. (Academic Press, London, 1980).
- [18] A. F. Andreev, Sov. Phys. JETP **22**, 455 (1966).

- [19] A. D. Zaikin and G. F. Zharkov, *Sov. Phys. JETP* **54**, 944 (1981).
- [20] Y. Nazarov, private Mitteilung.
- [21] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling und B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, (Cambridge University Press, 1988).
- [22] A. Sumiyama, Y. Oda und H. Nagano, *J. Phys. Soc. Jpn.* **53**, 2449 (1984).
- [23] R. B. Dingle, *Proc. Phys. Soc.* **A212**, 47 (1952).
- [24] U. Eckern, in *Quantum Processes and Dissipation* (VCH Verlag, Weinheim, im Druck).
- [25] J. Imry, *Introduction to Mesoscopic Physics*, (Oxford Academic Press, im Druck).
- [26] J. Rammer und H. Smith, *Rev. Mod. Phys.* **58**, 323 (1986).
- [27] G. E. Blonder, M. Tinkham, und T. M. Klapwijk, *Phys. Rev. B* **25**, 4515 (1982).
- [28] W. L. McMillan, *Phys. Rev.* **175**, 537 (1968).

Danksagung:

Diese Arbeit verdankt ihre Fertigstellung der Unterstützung vieler Menschen. Einige sollen hier persönlich erwähnt werden, als da wären

- Prof. Gerd Schön, der mich an seinem Institut aufgenommen hat und mir die Durchführung der Arbeit ermöglicht hat.
- Prof. Dierk Rainer, der so freundlich war, das Korreferat zu übernehmen.
- Christoph Bruder, der mich während der gesamten Zeit hervorragend betreute und mit vielen kleinen und großen Tips zum Gelingen beigetragen hat.
- meine Eltern, die mich so großzügig finanziell und moralisch während meines gesamten Studiums unterstützten.
- meine Freundin Christine, die mich in der Endphase der Arbeit ertragen mußte und dies ohne eigenen Nervenzusammenbruch schaffte.
- alle Institutsmitglieder, die für eine angenehme Atmosphäre sorgten.